

常微分方程式の数値解法における オイラー法とルンゲ・クッタ法について

濱地賢太郎

立命館大学理工学部 物理科学科

kht23151@pl.ritsumei.ac.jp

2010年7月21日

概要

常微分方程式の数値解法としてよく用いられる、オイラー法とルンゲクッタ法について調べた。両者の考え方、利点等を議論した後、フックの力を受ける質点の運動方程式を解くプログラムを作成し、その出力結果について考察をした。

1 イントロダクション

古典力学における運動方程式は数学的には微分方程式であり、これを解くことによって、力学系の任意の時間における状態-位置と速度-を求めることができる [1, 2]。しかしながら、物理で現れるようなほとんどの場合、微分方程式の解の存在は保証されている一方で、それらのほとんどは初等関数を用いて書き表すことができない^{*1} ことが知られている。 . . .

2 オイラー法について

(オイラー法の解説)

3 ルンゲ・クッタ法について

(ルンゲクッタ法の解説)

4 オイラー法とルンゲ・クッタ法の比較

(それぞれの利点や欠点を比較する)

5 バネに結び付けられた運動の数値計算プログラムと結果の解析

5.1 考察するモデル

(問題の設定の解説)

*1 よく知られた例は、単振り子の運動方程式 $\ddot{\theta} = -\sin \theta$ である。この解を表すにはヤコビの楕円関数が必要。

5.2 オイラー法によるプログラム

5.2.1 オイラー法によるソースコード

```
#include <stdio.h>
#define K 1 /* K をバネ定数を表すとしてそれを 1 と定める */

int main(){
    double t; /* 時間変数 */
    double x,xa; /* x は現在の x の値、xa は次のステップの x の値 */
    double v,va; /* v は現在の v の値、va は次のステップの v の値 */
    double dt; /* 時間の刻み (小さいほど近似の誤差は少なくなるが、処理速度は落ちる)*/

    dt=0.05; /* 時間の刻みを 0.05 にする */

    x=1.0; /* 初期条件の設定 (初期位置) */
    v=0.0; /* 初期条件の設定 (初速度) */

    for(t=0.0; t<10; t=t+dt){ /* 0 秒から 10 秒まで dt 刻みで計算 */
        printf("%f %f\n",t,x); /* 時刻 t とそのときの値 x を出力 */

        xa =x +dt * v; /*現在ステップの値から次のステップの値を計算する*/
        va =v - K * x * dt;

        x = xa; /* 次のステップの値を、現在のステップの値とする */
        v = va;
    }
    return 0;
}
```

ソースコード 1 オイラー法のソースプログラム

5.2.2 出力結果

表 1 は、ソースコード 1 によるプログラムの出力と、真の解 $\cos t$ との比較をしたもの。出力における時刻の刻みは 1 秒で、10 秒間のデータを出力したものである。

t	Euler	$\cos t$	err.	t	Euler	$\cos t$	err.
0	1.00	1.00	0.00	5	0.32	0.28	0.03
1	0.55	0.54	0.01	6	1.11	0.96	0.15
2	-0.44	-0.42	-0.02	7	0.90	0.75	0.15
3	-1.07	-0.99	-0.08	8	-0.17	-0.15	-0.02
4	-0.73	-0.65	-0.07	9	-1.14	-0.91	-0.23

表 1 オイラー法での出力結果

5.3 ルンゲ・クッタ法によるプログラム

(ルンゲ・クッタ法によるプログラムのソースコードと, 出力結果, 誤差の評価など)

5.4 オイラー法・ルンゲクッタ法の結果の比較と考察

(結果を比較して, そこから導かれることがらについて)

6 まとめ

参考文献

- [1] E. クライツィグ 著, 常微分方程式, 北原和夫 訳, 培風館, 1987.
- [2] 有馬朗人 著, 基礎物理学, 学術図書出版社, 1987.
- [3] B. W. カーニハン, D. M. リッチー著, 石田晴久 訳, プログラミング言語 C, 共立出版, 1989.
- [4] 奥村晴彦 著, L^AT_EX₂ ϵ 美文書作成入門, 技術評論社, 2007.
- [5] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W.T. Vetterling 著, Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, 1988.
- [6] <http://www.gnuplot.info/index.html>, gnuplot homepage, 2009.
- [7] 伊里正夫, 藤野和建 著, 数値計算の常識, 共立出版, 1985.