量子力学におけるラグランジアン

P. A. M. ディラック

November 19, 1932

序

量子力学は古典力学のハミルトニアン理論とのアナロジーを基礎として構築された。これは、正準座標と正準運動量という古典的概念が非常に簡単な形で量子力学と類似をもつところが見いだされたためである。その結果として、座標と運動量の概念のもとになりたつ古典力学のハミルトニアン理論全体が、そのすべての詳細を量子力学に引き継ぐことができた。

さて、ラグランジアンによって与えられる古典力学の別種の定式化がある。これは座標と運動量の代わりに座標と速度で行うことを要請する。2 つの定式化はもちろん密接に関係付けられるが、このラグランジアンによる定式化がより基本的であるとする理由がある。

まずラグランジアンの方法はすべての運動方程式を揃え、それらをある作用関数の停留性として表す（この作用関数はラグランジアンの時間積分である)。ハミルトニアン理論の座標と運動量で対応する作用原理はない。二番目にラグランジアンの方法は作用関数が相対論的に不変なので簡単に相対論的に表現することができる。一方でハミルトニアンの方法は特定の時間変数をハミルトン関数の正準共役として理解するので本質的に非相対論的である。

これらの理由によって古典論のラグランジアンの方法の量子論の対応物の問題を取り上げるのが望ましいように見える。しかしながら、少し考えると非常に直接的な方法では古典的なラグランジアン方程式を引き継ぐことが期待できないことが分かる。これらの方程式は座標と速度についてラグランジアンの偏微分を含み、量子力学においてはそのような微分に意味を与えることができない。量子力学の力学変数について実行できる唯一の微分操作はポアソン括弧 (Poisson brackets) であり、このプロセスはハミルトニアン理論に導く[*1]。

従って間接的な方法で量子ラグランジアン理論を探さなければならない。そこでは, 古典ラグランジアン理論の『方程式』ではなく、その『アイデア』を引き継がなければならない。

[*1] 行列についての偏微分に対するプロセスはボルン (Born)、ハイゼンベルグ (Heisenberg)、ヨルダン (Jordan) によって与えられた (ZS. f. Physik **35**, 561, 1926) が、これらのプロセスは表現の選択に依存しないので力学変数についての微分の意味を与えない。量子力学変数についての微分に含まれる困難の例として

$$m_x m_y - m_y m_x = ihm_z$$

を満たす 3 成分の角運動量を考える。ここで m_z を明確に m_x と m_y の関数として表したが、m_x または m_y についての偏微分に意味を与えることはできない。

正準変換

ラグランジアン理論は正準変換の理論と密接につながっている。それゆえ、古典正準変換と量子正準変換の間のアナロジーの議論から始める。2 つの変数の組を p_r, q_r と P_r, Q_r, $(r = 1, 2, \cdots, n)$ とし、q_r と Q_r はすべて独立とするので力学変数の任意の関数はそれらで表すことができる。古典論においてこの場合の変換式は

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}, \quad P_r = -\frac{\partial S}{\partial Q_r} \tag{1}$$

となることはよく知られている。 ここで S は q_r と Q_r の関数である。

量子論においては q が対角になるある表現をとり、Q が対角になる別の表現 (second representation) をとる。2 つの表現をつなぐ変換関数 $(q'|Q')$ がある。いまこの変換関数が $e^{iS/h}$ の量子アナロジーであることを示す。

α が量子論における力学変数の任意関数であれば, それは, “ 混合” 『代表 (representative)』$(q'|\alpha|Q')$ をもち, それは, 通常の代表；$(q'|\alpha|q'')$, $(Q'|\alpha|Q'')$ をつかって、

$$(q'|\alpha|Q') = \int (q'|\alpha|q'')dq''(q''|Q') = \int (q'|Q'')dQ''(Q''|\alpha|Q')$$

のように定義される。最初の定義から ($\alpha = q_r$ と選べば)

$$(q'|q_r|Q') = q'_r(q'|Q') \tag{2}$$

$$(q'|p_r|Q') = -ih\frac{\partial}{\partial q'_r}(q'|Q') \tag{3}$$

二番目の定義から ($\alpha = Q_r$ に選べば)

$$(q'|Q_r|Q') = Q'_r(q'|Q') \tag{4}$$

$$(q'|P_r|Q') = ih\frac{\partial}{\partial Q'_r}(q'|Q') \tag{5}$$

を得る。 (**??**) と (**??**) の符号に注意。

(**??**) と (**??**) は次のように一般化される。$f(q)$ を q の任意関数、$g(Q)$ を Q の任意関数とする。このとき

$$\begin{aligned}(q'|f(q)g(Q)|Q') &= \int\int (q'|f(q)|q'')dq''(q''|Q'')dQ''(Q''|g(Q)|Q') \\ &= f(q')g(Q')(q'|Q')\end{aligned}$$

さらに、$f_k(q)$ と $g_k(Q)$, $(k = 1, 2, \cdots, m)$ がそれぞれ q と Q の関数の集合であれば

$$(q'|\sum_k f_k(q)g_k(Q)|Q') = \sum_k f_k(q')g_k(Q') \cdot (q'|Q')$$

したがって α が力学変数の任意関数であり、それを”うまく並べて (well-ordered)” q と Q の関数 $\alpha(qQ)$ として表すようにする、すなわち $f(q)g(Q)$ の形の項の和からなるようにすれば、

$$(q'|\alpha(qQ)|Q') = \alpha(q'Q')(q'|Q') \tag{6}$$

を得る。これは演算子の関数である $\alpha(qQ)$ と数値変数の関数である $\alpha(q'Q')$ の間のつながりを与えるより注目すべき式である。

$\alpha = p_r$ に対してこの結果を適用する。U を q' と Q' の新しい関数として

$$(q'|Q') = e^{iU/h} \tag{7}$$

とおくと、(**??**) から

$$(q'|p_r|Q') = \frac{\partial U(q'Q')}{\partial q'_r}(q'|Q')$$

を得る。これを (**??**) と比較すると、与えられた $\partial U/\partial q_r$ が well-ordered になる、演算子と力学変数の間の等式として

$$p_r = \frac{\partial U(qQ)}{\partial q_r}$$

を得る。同様に、(**??**) の結果を $\alpha = P_r$ に対して適用し、(**??**) を用いると、与えられた $\partial U/\partial Q_r$ が well-ordered となる

$$P_r = -\frac{\partial U(qQ)}{\partial Q_r}$$

を得る。これらの式は (**??**) と同じ形であり、(**??**) によって定義される U は古典的な関数 S のアナロジーであり、証明しなければならなかったものである。

また、同時に別の定理、すなわち (**??**) は右辺が微分と導関数が well-ordered であるという目的に対して変数は古典的に扱われるという適切な解釈が与えられる量子論においても成り立つという定理を得た。この定理は以前に異なる方法によってヨルダンによって証明されている[*2]。

*2 Jordan, ZS. f. Phys. **38**, 513, 1926.

ラグランジアンと作用原理

古典論の運動方程式は力学変数に対して、『任意の時間 t での値 q_t, p_t が正準変換によって別の任意の時間 T での値 q_r, p_r につながるような形』で、変化をひき起こさせる：これは (**??**) で $q, p = q_t, p_t; Q, P = q_r, p_r$ と置き、S を範囲 T から t のラグランジアンの時間積分に等しいと置くことによって得られる。量子論においても、q_t, p_t は正準変換によって q_r, p_r とつながり、q_t と q_T がそれぞれ対角になる 2 つの表現をつなぐ変換関数 $(q_t|q_T)$ がある。前節で行ったことは、いまの場合には

$$(q_t|q_T) \leftrightarrow \exp\left[i\int_T^t Ldt/h\right] \tag{8}$$

という対応を意味するとみられる。ここで L はラグランジアンである。　T を t から無限に小さな差にとれば

$$(q_{t+dt}|q_t) \leftrightarrow \exp[iLdt/h] \tag{9}$$

なる対応関係を得る。

(**??**) と (**??**) の変換関数は量子論において非常に基本的なものである。そして、それらがラグランジアンを用いて表現しうる古典的アナロジーを見いだすことは満足すべことである。ここで波動関数の位相が古典論におけるハミルトン関数に対応するというよく知られた結果の自然な拡張を得る。アナロジー (**??**) は古典的なラグランジアンを座標と速度の関数ではなく、時間 t での座標と時間 $t+dt$ での座標の関数として考えるべきであることを示唆している。

簡単のため 1 自由度の場合を考えるが一般の場合にも適用できる。$A(tT)$ が $(q_t|q_T)$ の古典的アナロジーとなるように記号

$$\exp\left[i\int_T^t Ldt/h\right] = A(tT)$$

を用いる。

時間区間 $T \to t$ を中間時間列 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ の導入によって多数の小区間 $t \to t_1, t_1, \to t_2, \cdots, t_{m-1} \to t_m, t_m \to t$ に分割することを考える。このとき

$$A(tT) = A(tt_m)A(t_mt_{m-1})\cdots A(t_2t_1)A(t_1T) \tag{10}$$

いま量子論において

$$(q_t|q_T) = \int (q_t|q_m)dq_m(q_m|q_{m-1})dq_{m-1}\cdots(q_2|q_1)dq_1(q_1|q_T) \tag{11}$$

を得る。ここで q_k は中間時間 t_k $(k=1,2,\cdots,m)$ での q を表す。一見すると (**??**) の右辺においては積をとった後で積分しなければならず、(**??**) の右辺においては積分がないので、(**??**) は (**??**) に正しく対応するようには見えない。

t を非常に小さいとしたとき (**??**) がどうなるかを見ることによってこの食いちがいを調べよう。(**??**) と (**??**) から (**??**) の被積分関数は $e^{iF/h}$ の形でなければならないことが分かる。ここで F は $q_T, q_1, q_2, \cdots, q_m, q_t$ の関数であり、h がゼロに近づくにつれて有限にとどまる。いま中間の q の 1 つ q_k を連続的に変化させ、残りを固定する。h が小さいことによってこのとき一般にきわめて速く変化する F/h を得る。これは $e^{iF/h}$ が、その積分が実際にゼロになることの結果として、値ゼロについて非常に高振動で周期的に変化することを意味する。q_k の積分領域における唯一の重要な部分はしたがって q_k における比較的大きな変化が F における非常に小さな変化だけを与えるところである。この部分は F が q_k の小さな変化について変化しない点の近傍である。

この議論を (**??**) の右辺における積分の各変数について適用でき、積分領域における唯一の重要な部分は F がすべての中間の q における小さな変化に対して安定なところであるという結果を得る。しかし、(**??**) を小さな時間区間のそれぞれに適用することによって、F はその古典的アナロジーに対して

$$\int_{t_m}^{t} Ldt + \int_{t_{m-1}}^{t_m} Ldt + \cdots + \int_{t_1}^{t_2} Ldt + \int_{T}^{t_1} Ldt = \int_{T}^{t} Ldt$$

を持つことが分かる。これはまさに古典力学がすべての中間の q における小さな変化に対して安定であることを要求する作用関数である。これは h が非常に小さくなるとき (**??**) が古典的な結果に向かう方法を表す。

さて、h が小さくない一般の場合に戻ろう。量子論との比較に対して、(**??**) は次のように解釈されなければならないことが分かる。各量 A は 2 つの時間での q の関数として考えなければならない。このとき右辺は q_T と q_t だけでなく $q_1, q_2, \cdots, q_m$ の関数でもあり、(それは左辺に等しいとできる)、q_T と q_t だけの関数を得るために作用原理によって与えられる値を $q_1, q_2, \cdots, q_m$ に代入しなければならない。このときこの中間の q への代入プロセスは (**??**) におけるこれら q のすべての値での積分プロセスに対応する。

(**??**) は以下の議論からより明確に見られるように、作用原理の量子アナロジーを含む。(**??**) から、q_T と q_t を特定の値にとれば中間の q に対する値全体を考えることの重要性は (**??**) の右辺での積分におけるこの値全体の重要性によって決定される、という（むしろ自明な）主張を引用することができる。いま h をゼロに近づければこの『言明』は、つぎのような古典的な古典的言明に帰着する：すなわち、q_T と q_t を特定の値にとれば、中間

の q に対する値全体を考えることの重要性は、『これらの値が作用関数を停留にしなければ積分値はゼロである』という言明である。この主張は古典的な作用原理の定式化の 1 つの方法である。

場の理論への応用

うえで展開したきた粒子に対するラグランジアンの方法をつかって振動媒体（あるいは、場）の問題を扱おう。『座標』として適切な場の量あるいはポテンシャルを選ぶ。各座標はこのとき粒子の理論において 1 変数だけの関数であるという事実に対応して 4 つの時空変数 x, y, z, t の関数である。したがって粒子の理論の 1 つの独立変数 t は 4 つの独立変数 x, y, z, t に一般化される[*3]。

時空の各点でラグランジアン密度を導入する。これは座標と速度の関数である粒子の理論におけるラグランジアンに対応して、座標と x, y, z, t に関するそれらの 1 階微分の関数でなければならない。このとき（4 次元）時空のすべての領域でのラグランジアン密度の積分は不変な境界上の座標が与えられた領域内の座標のすべての小さな変化に対して停留でなければならない。

さて、この量子アナロジーがどのようなものでなければならないかを見ることは簡単である。S を時空の特定の領域での古典ラグランジアン密度の積分を表すとすると、それには粒子の理論の $(q_t|q_T)$ に対応する $e^{iS/h}$ の量子アナロジーがあると期待すべきである。この $(q_t|q_T)$ は時間区間の端点での座標の値の関数であり、よって $e^{iS/h}$ の量子アナロジーは時空領域の境界上の座標の値の関数（実際には汎関数）であることが期待される。この量子アナロジーは一種の” 一般化された変換関数 (generalized transformation function)” である。一般には、$(q_t|q_T)$ のように力学変数の 1 つの集合と他の集合の間の変換を与えるという解釈はできないが、次の意味で $(q_t|q_T)$ の 4 次元の一般化である。

$(q_t|q_T)$ に対する合成則

$$(q_t|q_T) = \int (q_t|q_1)dq_1(q_1|q_T) \tag{12}$$

に対応して、一般化された変換関数 (g.t.f.) は次の合成則を持つ。時空の与えられた領域をとり、それを 2 つの部分に分ける。このとき全領域に対する g.t.f. は 2 つの部分の共

[*3] 場の力学においては (x, y, z) の異なる 2 つの値、t は同じ値、に対する場の量の値を独立変数の領域における異なる 2 つの点に対する同じ座標の 2 つの値とする代わりに 2 つの異なる座標とし、この方法で 1 つの独立変数 t のアイデアを維持するのが慣習である。この観点はハミルトニアンの扱いに対して必要であるが、ラグランジアンの扱いに対してこのテキストで採用した観点はそのより大きな時空の対称性のためにより適切であるように見える。

通の境界上の座標に対するすべての値で積分された、2 つの部分に対する g.t.f. の積に等しい。

(**??**) を繰り返すと (**??**) を与え、g.t.f. に対して対応する法則を繰り返せば同様の方法で任意の領域に対する g.t.f. をその領域が分けられる非常に小さな部分領域に対する g.t.f. につなげることが可能になる。このつながりは、場に適用された作用原理の量子アナロジーを含む。

変換関数 $(q_t|q_T)$ の絶対値（modulus）の 2 乗は初期時間 T での座標の観測が、確定した結果 q_T を与える状態に対して、終りの時間 t での座標で、値 q_t を見いだすことの観測確率として理解される。　g.t.f. のモジュラスの 2 乗に対する対応する意味は g.t.f. が 2 つの離れた（3 次元）曲面、それは『それぞれが空間方向に無限大に拡張され曲面上に vertex を持つすべての light-cone の外にある』、よって境界づけられる時空の領域を表すときにのみ存在する。このとき g.t.f. のモジュラスの 2 乗は座標が最初の曲面上のすべての点で定まった値を持つように与えられる状態に対して後の曲面上のすべての点で特定の値を持つ座標の確率を与える。この場合 g.t.f. は曲面の 1 つの上での座標と運動量の値ともう一方の曲面上での値をつなぐ変換関数と考えられる。

（初期の観測が状態を変え、後の観測に影響を与えるという事実を考慮して）時間 T と t で q の観測が得られるとき結果 q_T と q_t を生じるすべての状態の相対的かつ先験的（アプリオリ）的な確率を与えるように $|(q_t\ q_T)|^2$ を考えることもできる。これに応じて境界上のすべての点での座標から観測が得られるときに得られる特定の結果の相対的先験的な確率を与えるようにすべての時空領域に対する g.t.f. のモジュラスの 2 乗を考えることができる。この解釈は時空領域の形への制限を要請しないので前述の解釈よりも一般的である（完）。

(石井たけのり訳)

解説

用語のこと

正準変換は、原語では contact transformation である。直訳すれば、接触変換であるが、この用語は、少々古色蒼然としてので、普通の用語である正準とした。

Dirac = Tomonaga + Feynman + Schwinger

ここで訳出されたディラックの原論文は、1933 年という現在の研究者からすれば、「化石」のような感があるが、その根底の思想は全く色あせてはいない。(わたしの個人的な感触でいえば、変換関数の概念は、現代トポロジーのコボルディズム理論につながるものがあるのではと思っている)。

もっとも、原典にもどらずとも、主要なアイデアは彼の有名な『量子力学』の section 32 (fourth edition) に提示されている。ただし、場の理論に関する GTF は省略されている。おそらくディラックとしては、一般読者に無用の混乱を与えることを避けるという配慮したのか、あるいは、自分で言っておきながら、それほど重要な概念であると思っていなかったのか。テキストは読者が論理的にいちばんフォローしやすい形で書かれるのが通常である。それゆえ、生のワイルドなアイデアから新しいヒントを得るためには、ときに原論文にお立ち戻ることによることによってなされる場合もあるかもしれない。

この論文はファインマン経路積分の原型となっているのであるが、この事実を知るものは、現在ではあまり（あるいはほとんど）いないと思われる。量子力学の経路積分理論はファインマンの専売特許のようであるが (実際そうであるかもしれないが)、実際は、ディラックがその概念を夙に把握していたことは、この訳文を読めば明らかである。もっとも華々しいディラックの業績全体からすれば、スナック菓子くらいの意味しか持たないあかもしれない。ともかく、経路積分の意味が当時の物理学者に「全く」認識されていなかったと思われる (completely un-appreciated !!)。早すぎるアイデアというのも不運である。ちなみに、ファインマンが経路積分のアイデアを得たときに、『量子力学』の第 2 版が出ていたはづで、そこにはすでに「作用原理」の節が加えられていたと思うが、そうであれば、ファインマンはきちんと読んでなかったということになる。(こういう経緯は物理学史の研究課題に属するものかもしれないが)

論文が著者のねらいとは別の観点が強調されるということがままあることだが、この論文も、その後の場の理論の発展にとっては、経路積分の観点が没却されていわゆる超多時間理論という観点のきっかけをあたえた論文という意味合いに転化された面があると思わ

れる。この点に関して少し説明を加えたい。要点はは、論文の最後の節で、一般変換関数 (g.t.f) を導入しているところにある。これは、粒子系における変換関数を場の理論において、相対論的不変性を保つ形で拡張したものである。そのポイントは、粒子系における『瞬間的な時間』の考えをつかって、２つの時刻のあいだをつなぐ変換の考えを拡張したところにある。

◯：通常の非相対論的変換関数は、

$$\langle x', t_2 | x, t_1 \rangle$$

と書かれるが、これは、時刻 t_1 において、力学変数 $\hat{x}$ (演算子であることを考慮して,$\hat{}$ をつけておく）を観測したときに、固有値 x を見いだしたとき、後の時刻 t_2 において, $\hat{x}$ を観測したとき、固有値 x' を見いだす確率振幅を与える。場の理論へ拡張するときには、$|x\rangle$ の変わりに、すべてにの時空点における場の演算子 $\hat{\phi}(x)$ の固有値という、いわば、汎関数 $|\{\phi(x)\}, t\rangle$ を導入し, 場の変換関数を定義する：

$$\langle \{\phi'(x)\}, t_2 | \{\phi(x)\}, t_1 \rangle$$

そして、これをさらに、相対論的不変にするために、時刻 t を『空間的』超平面 σ におきかえる. 超平面の意味は、そのうえの空間座標 (x, y, z) である点において局所的時間 t_{xyz} が定義されているものである。詳しくいえば、この曲面の微小に近い 2 点 (x, y, z, t_{xyz}) と $(x', y', z'.t_{x'y'z'})$ のあいだに,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 > c^2(t_{xyz} - t_{x'y'z'})^2$$

をみたすような曲面を意味する (少々のみこみにくい考えではあるが)。

このような２つの超曲面のあいだで、変換関数

$$\langle \{\phi'(\mathbf{x}, t_{\mathbf{x}'})\}, t_{\mathbf{x}'} | \{\phi(\mathbf{x}, t_{\mathbf{x}})\}, t_{\mathbf{x}} \rangle \quad \equiv \langle \{\phi'(\mathbf{x}, \sigma_2)\}, \sigma_2 | \{\phi(\mathbf{x}, \sigma_1)\}, \sigma_1 \rangle$$

($\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$ と略記) を定義できる。これが、ディラックのいう g.t.f である。

このように、ディラックは, GTF なる用語でもって、たった 1 ページの内に式による展開を用いないで、いとも無造作に場の量子的遷移を相対論的不変性を保持する形で定義しきったのである。この考えは、Tomonaga, Schwinger に引き継がれた。いわゆる超多時間理論である。しかし、その輪郭はこの両名が理論構築する１０年以上前に、はっきりと提出されていたのである。

◯: 天才だからなんでもできるのだという安易な評価で片付けられないものがある。うえで述べたように、ディラックは、この論文において、２つの新立脚点を提示している。このことを少し敷衍しよう。

● 変換関数から経路積分のアイデアを編み出したことに関して：

これはファインマンによって完成されたが、アイデアとしては、ほとんどそっくり、ファインマンの経路積分と同じ内容を、はるか先んじて提示している。作用関数を経路で和をとるという箇所を中途で明示的に数式化することをさぼったという点だけが「咎められて」しかるべきであるが、なによりも、古典極限を「鞍部点の手法」(method of stationary phase) によって完全に定義していることは驚くべきことといわなければならない。鞍部点という考えは、ディラックの supervisor であったファウラー（統計力学で名が知られている）が開発したもので、師匠のアイデアを借用したものかどうか定かでないが。ただし、ここからプランク定数による展開（いわゆる準古典展開）の理論構築が出てくるところまでは思いがいかなかったのは、当時としてはそれを追求する動機がなかったからであろう。(個人的な思い出であるが、大学３年のときに物理数学で鞍部点をはじめて習ったときのことであるが、なんのことかよく把握しないままに、ディラックのテキストの作用原理にさしかかったとき、これは鞍部点法をやっているのではないかと微かに感じ取った記憶がある)。

●; 一般変換関数について：

シュウィンガーは量子変分原理というものを提示しているが、経路積分には言及していない。さらに、朝永に至っては「作用関数」はもちろんのこと、経路積分など論外であったようである。彼にとっては、せっかく量子力学ができたのに古典的な考えなどを持ち出す理由が理解できなかったのかもしれない。

朝永の主要業績である超多時間理論に関しては、ディラックはさらに、多時間理論形式という形で、先鞭をつけていた。２つの電子に別々の時間をあたえて、場の影響を見かけ上消してしまおうというアイデアである（ちょと短絡的な表現であるが)。これを N コの粒子に拡張し、さらに、時空点での場に拡張したものが超多時間論である。多時間理論は、Heisenberg-Pauli を嚆矢とする場の量子論に不満を持ったあげくに提案したものであるらしい。粒子と場の相互作用をハミルトニアン形式で安易に扱うやり方に対して、我慢がならなかったのかもしれない。いわゆる発散の困難である。功なり名をとげても、その安逸な地位に満足せず最後まで困難を追求していく姿勢こそ、ディラックの名声を真に永続させていく所以となっているのであろう。ただし、超多時間理論も、残念ながら、それによって場の理論の根本的な問題が解決されたわけではない。

さて、近代的ゲージ場の量子化の展開において、経路積分がその威力を発揮して、その

後の量子論的定式化の標準的手法となっていることことからして、物理理論の展開は、そのときの「時代の意思」ぬきには考えることができないということかもしれない。

最後に、その『前線』が完全に崩壊してしまった感のある現在物理学において、このような『英雄時代の理論物理のシェイクスピア』の試みの思想を再考し、物理復権（これぞルネッサンス）を目指して、再出発をするための縁（よすが）ともならんことを祈っている。

(by Kuratsuji)