

物理と数学略解

2006/7/29

1: テキストをみよ。

2: 同次型の典型である。

$y = xu$ より、

$$x \frac{du}{dx} = \frac{2}{1+u} - u = \frac{-u^2 - u + 2}{1+u} \quad (1)$$

これから、

$$\int \frac{u+1}{(u-1)(u+2)} du = - \int \frac{dx}{x} \quad (2)$$

部分分数展開をして、

$$\frac{2}{3} \int \frac{du}{u-1} + \frac{1}{3} \int \frac{du}{u+2} = - \int \frac{dx}{x} \quad (3)$$

積分をすると、

$$2 \log(u-1) + \log(u+2) = -3 \log x + C \quad (4)$$

これから、

$$(u-1)^2(u+2) = Cx^{-3} \quad (5)$$

もとの x, y にもどすと、

$$(y-x)^2(y+2x) = C \quad (6)$$

3: 運動方程式

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \quad (7)$$

これから、

$$v(t) = \frac{m}{k}g + C \exp\left[-\frac{k}{m}t\right] \quad (8)$$

初速度を v_0 とすると、 $C = v_0 - \frac{k}{m}g$ となる。

つぎに、 $\frac{dx}{dt} = v(t)$ より積分して、

$$x(t) = \frac{m}{k}gt - \frac{k}{m}(v_0 - \frac{k}{m}g) \exp\left[-\frac{k}{m}t\right] \quad (9)$$

$t \rightarrow \infty$ において、 $v(\infty) = \frac{k}{m}g$ (一定) となる。いわゆる、終端速度である。

4:

(a): オイラーの公式より、

$$u = r^n \cos n\theta, \quad v = r^n \sin n\theta \quad (10)$$

となる。

(b) $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ より、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad (11)$$

かつ

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (12)$$

(c) (b) の結果を用いると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nr^{n-1} \cos(n-1)\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = nr^{n-1} \cos(n-1)\theta \quad (13)$$

ゆえに、 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ が成立する。さらに、 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ に関しても同様である。