

円周率と素数

Q: 円周率いうたらデ。π でっしょうが。素数いう痴： 1,2,3,5.....

A: 1 は素数といえるかどうか。この2つの数学の対象物は、もちろん直接的にはつながらない。しかし、どちらも中学で習う対象である。π は無理数（もっといえば超越数）である。素数というのは、個々の対象としては、素因数分解ができない基本的な数である。個々の数を取りあげて、素因数に分解するというのは、それ自体興味があるかもしれない。しかし、たとえば、10の10の10乗乗の桁の数字を出して因数分解せよというのは、計算機の性能を試すには格好であるが、数学として深いものがあるといえるだろうか。そもそも、ちょっと考えれば、宇宙の存在時間のあいだに、その作業が終わらないということが、中学生にでもわかるくらいのものである。だって、そうでしょうが。素数は無限にあるのですぞ。

素因数分解のような問題は、典型的な学校数学というものであろう。真の数学（いうならば、数学者のやる数学）では、このような問題は、対象としない。つまり、「深くはない」のである。

Q: 深いとか、深くないとか言う texa、なに言うトンの。。。「深い」いう痴、なんをもって「深い」いうん奈良。

A: たしかに、もっともな意見では有馬す。数学者のやる数学は、だいたい日常で、つかえるわけではない。普通使う数学は、学校数学でこと足りるという事実です。しかい、よくできる子供は、そういうものには、すぐに飽きる。。。。

という次第で、すぐに片がつくというものではないものを含んだものが、深いということだと定義するのはさしあたり、了解していただけるでしょう。

ということで、表題に掲げた、2つの対象物にもどります。まず、この2つを結びつける概念が、いまいった「無限」です。

無限というのは、学校数学では、漠然としたもので、実際にでてくることはない。まず、ゼロでは割れないということを、徹底的に覚えさせられる。たしかに、その通りであるが、かりに、「割れる」としてみると、ぐっと世界が広がります。つまり、無限遠点という概念がそれである。。。。

Q: ???????

A: そこで、本題にいきます。 π は、無理数といったが、無理数は、少数で表すと、「循環しない」ものつまり、無限に、0 から 9 までの数字が羅列される。もちろん、「かってではない」。数字の現れかた自体が研究対象になるというのでしょう。ということで、無限の概念が絡まっています。

もうひとつ、素数は、もちろん、無限個あるというのは、よく知られた定理である。それは、初等的に証明することはできる。さて、ここで問題とするのは、素数が無限個あることを、 π の無理数と関連づけることである。

そのために、少し準備をします。つまり、学校数学ではでてこない関数を導入する。いわゆるゼータ関数というもの。定義は、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ここで、 s は、“一般に”複素数をあらわす。学校数学でならう、級数（つまり、封列を無限個足すというやつ）に似てるが、すこし違う。その違いは、すぐに了解できる。たとえば、 $s = 5$ を入れた、 $\zeta(5)$ を求めることは、ものすごくむずかしい !!! ということは分かっていたでしょう。なんならやってみて下さい。PC をつかって、 $n = 100$ くらいやって、近似値をだすということはできるでしょうが。。。。。冪級数で、 x に値をいれて求めるということと訳が違う。

しかし、特殊なとき、たとえば、 $s = 2$ の値： $\zeta(2)$ などは、よく分かっています、

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

これで、ここでの問題の半分が準備できました。もうひとつは、ゼータ関数の素数分解です。それは

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

という関係式です。これは、通常 Euler 積表示といわれるものです。級数が、すべての素数に関する無限積に化ける。この式自体の証明はそうむずかしくない。 n を素因数に分解すれば、

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_n^{\alpha_n}$$

をつかって、まとめ直せば、でてきます。（やってみて下さい）。

これで準備完了。

Q: なんば、ショットですか。

A: いま、出した式から、つぎの等式

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{\pi^2}{6}$$

が成立する。そこで、背理法の要領で、

『もし素数が有限であるとする、左辺の無限個の積は有限で終わる。ということは、それは有理数をあらわす。一方、右辺は π がはいってくることから明らかに無理数である。これは矛盾する。ゆえに素数は有限で終わることはない：証明終わり』

如何ですか。要するに、 $\zeta(s)$ というのは、数学の対象として、もっとも神秘的なものである（最も神秘的なものの「ひとつ」ではなくて、数学の歴史のなかで数学者が見いだした対象のうちでもっとも難解神秘的な唯一の対象）という言明の、針の先のような事実を使ったという次第。

ゼータ関数が解明された時点で、人間の存在理由が消滅するかもしれない。。。。。