

確率過程論 演習&レポート

問題 1. 確率変数 X が 2 項分布 $B(n, p)$ に従うとする.

- (1) $\frac{P(X=i)}{P(X=i-1)}$ ($1 \leq i \leq n$) を計算せよ.
- (2) $P(X = k)$ が最大となる k を求めよ.

問題 2. 確率変数 X が, 次のように定義される密度関数 f を持つとする:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} \quad (0 < x < 2) \\ &= 0 \quad (\text{それ以外}) \end{aligned}$$

次の問に答えよ.

- (1) X の分布関数を求めよ.
- (2) $P(X < 1)$ を計算せよ.
- (3) $P(X > \frac{3}{2})$ を計算せよ.
- (4) $P(X \leq m) = \frac{1}{2}$ を満たす m を求めよ.

問題 3. 確率変数 X が, 次のように定義される密度関数 f を持つとする:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 \quad (0 < x < 1) \\ &= 0 \quad (\text{それ以外}) \end{aligned}$$

次の問に答えよ.

- (1) X の分布関数を求めよ.
- (2) $P(X < 1)$ を計算せよ.
- (3) $P(X > \frac{3}{2})$ を計算せよ.
- (4) $P(X \leq m) = \frac{1}{2}$ を満たす m を求めよ.

問題 4. 確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は独立で, それぞれ成功の確率 p の幾何分布に従うとする. このとき, $T = \sum_{i=1}^n X_i$ の分布を求めよ.

問題 5. 確率変数 X は, パラメータ λ の指数分布, 確率変数 Y が区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従い, かつ, X と Y は独立とする. このとき, $X + Y$ の密度関数を求めよ.

問題 6. 確率変数 X, Y は独立で, パラメータ λ, μ ($\lambda \neq \mu$) の指数分布に従うとする. このとき, $X + Y$ の密度関数を求めよ.

問題 7. 確率変数 X が次のように定義される密度関数 f を持つとする:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^{-4} \quad (x > 1) \\ &= 0 \quad (\text{それ以外}) \end{aligned}$$

このとき, X の平均, 分散を求めよ.

問題 8. 確率変数 X が密度関数 $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ をもつとき, X の平均, 分散を求めよ.

問題 9. 2 回のサイコロを振り, それぞれのサイコロの出た目を X, Y とおくと, 次の平均を求めよ.

- (1) $X + Y$
- (2) $\max\{X, Y\}$
- (3) $\min\{X, Y\}$
- (4) $|X - Y|$

問題 10. 確率変数 X, Y は独立で, パラメータ λ の指数分布に従うとする. このとき, $E|X - Y|$ を求めよ.

問題 11. 確率変数 X が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする.

- (1) $EX^k = (k-1)EX^{k-2}$ ($k = 1, 2, \dots$) が成立することを証明せよ.
- (2) 任意の自然数 n について, $EX^{2n-1} = 0$, $EX^{2n} = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$ が成立することを証明せよ.

問題 12. (教科書 10 参照) d 次元ガウス分布 $N(a, V)$ の特性関数を求めよ.

問題 13. X, Y を 1 次元確率変数とする. このとき, X, Y が独立であることと $E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$ が任意の実数値ボレル関数 f, g にたいして成立することが同値であることを証明せよ.

問題 14. 集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ について次のことを証明せよ.

ここで, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ ($\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ の上極限), $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ ($\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ の下極限) を表すものとする.

特に, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ と表す.

(1)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(2) $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が単調増加列ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(3) $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が単調減少列ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$