

特殊講義

CONTENTS

1. はじめに	2
2. 自然数の世界	2
3. 0 の発見	3
4. 減法と除法	4
5. 整数	5
6. 倍数, 約数, 素数	6
7. 等式	10
8. 有理数	11
9. 不等式	13
10. ピタゴラスの定理と実数	15
11. 2 次方程式 (ディオファントス型)	21
12. 複素数	22
13. 2 次方程式 (一般形)	26
14. 解と係数の関係	27
15. 関数	30
16. 座標	34
17. グラフ	39
18. グラフと方程式	44
References	46

1. はじめに

数学は何のために勉強するのか？このような疑問は多くの人が持つ疑問であるように思える。数学に魅せられた人は、例えば数学者は、山登りの人が答えるように、「そこに美しい数学があるから」と答えるだろう。しかし、多くの人はその返答に納得しないと思う。それは「勉強」という以上は、「実益」がなければならないというのが、日本のお国柄であるためかもしれない。この講義では、「経営学のための数学」は解説をしない。

内容自体は高校の数学の域を超えないが、なるべくその内容(概念)の定義に立ち返り解説を試みる。目的に縛られないので、逆に言えば、本人の心がけ次第では多くの場面で役に立つかもしれない。受験のための数学ではなく、学問としての数学を学んで、美しい数学の世界を楽しんで頂きたい。

2. 自然数の世界

1, 2, 3, ... のように 1 から始まって次々に 1 を加えていく数を自然数という。自然数全体の集まりを $\mathbb{N}$ と表示する。我々は、物心ついてから物を数えるときにこの数を用いており、数自身は数えられる対象に依存しない。つまり、リンゴが 1 個、消しゴムが 1 個、それぞれに対して同じ 1 という数字を対応させる。それ故、この数字を用いて数え上げができる。自然数の世界 $\mathbb{N}$ では、次の加法と乗法が定義できる。

定義 2.1. (1) 2 つの自然数 a, b に対して、 a から 1 ずつ足していき、 b 回目に達する数を $a + b$ と書き表す。この演算を加法という。

(2) 2 つの自然数 a, b に対して、 $\underbrace{a + a + \cdots + a}_b$ の数を $a \times b$ と書き表す。この演算を乗法という。通常、 $a \times b$ を ab と省略して書く。(すなわち、 $a \times b = ab$)

これら加法、乗法には次のような演算が成立する。

法則 2.2. a, b, c を自然数とする。($a, b, c \in \mathbb{N}$ と書く) このとき次のことが成立する。

- (1) $a + b = b + a, \quad ab = ba$ (交換法則)
- (2) $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$ (結合法則)
- (3) $a(b + c) = ab + ac$ (分配法則)

これらの法則は、自然数の定義から導かれる。しかし、ここでは定義については触れない。興味がある人は、[4] を参照せよ。

自然数の世界で次の数学的帰納法は重要な考察方法である。この方法の正当性についても自然数の定義から導かれる。

法則 2.3. (数学的帰納法) 自然数に関する性質 E が、

- (i) $n = 1$ のとき成立。
 - (ii) $n = k$ のとき成立すると仮定すると、 $n = k + 1$ のとき性質 E が成立する。
- ならば、すべての自然数 n にたいして、この性質 E は成立する。

例題 2.4. $2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n(n + 1)$ を証明せよ.

(解答)

$n = 1$ のとき, 左辺 $= 2 \times 1 = 2$, 右辺 $= 1(1 + 1) = 2$ で成立している.

$n = k$ のとき成立すると仮定する. すなわち,

$$2(1 + 2 + \cdots + k) = k(k + 1).$$

このとき,

$$\begin{aligned} 2(1 + 2 + \cdots + k + (k + 1)) &= 2(1 + 2 + \cdots + k) + 2(k + 1) \\ &= k(k + 1) + 2(k + 1) \quad (n = k \text{ の仮定}) \\ &= (k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

故に, $n = k + 1$ のときも等式は成立している. よって, 数学的帰納法よりすべての n について等式は成立する. $\square$

問題 1. 次の等式を数学的帰納法で証明せよ.

- (1) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
- (2) $3\{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n - 1)^2\} = n(2n - 1)(2n + 1)$
- (3) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

3. 0 の発見

インドで発見された 0 (6 世紀頃) を自然数に加えて数の世界を拡張することを考える. (0 を含んだある公理を満たすのを自然数と定義する方法もある. [4] 参照) 拡張する以上 $\mathbb{N}$ 上で成立していた演算の性質を新しい数の世界でも成立するように定め, さらに次の 2 つの法則を満たすとする.

法則 3.1. $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$

このとき次のことが成立する.

命題 3.2. (1) $0 \times 0 = 0$

(2) どんな自然数 a に対しても, $0 + a = a + 0 = a$

(3) どんな自然数 a に対しても, $0 \times a = a \times 0 = 0$

(証明)(1) $0 \times 0 = 0 \times (0 + 0) = 0 \times 0 + 0 \times 0$. 自然数の中で, $a + a$ は a より大きくなるので, $0 \times 0 = 0$ となる.

(2) $a + 0 = 0 + a$ は交換法則より成立.

主張を数学的帰納法で示す.

$n = 1$ のとき, 仮定より, $1 + 0 = 1$. $n = a$ のとき成立するとして, $n = a + 1$ のときを考察する.

$$\begin{aligned} (a + 1) + 0 &= a + (1 + 0) \\ &= a + 1. \end{aligned}$$

よって数学的帰納法よりすべての自然数 a について $a + 0 = a$ が成立する.

(3) $0 \times a = a \times 0$ は交換法則より成立する.

$0 \times a = (0 + 0) \times a = 0 \times a + 0 \times a$. (1) と同じ理由で, $0 \times a = 0$ がいえる. $\square$

”0”の発見は, 次の整数への数の拡張で重要な役割を果たすが, その前に数の表示(位取り記数法)で大きな役割を果たした. 例えば, 百八, 十八, 千八十, というように, 新しい桁が発生するごとに, 新しい記号, 十, 百, 千, 万, と必要になってくる. これはローマ数字でも同様. しかし, インドでは, $0 \sim 9$ の数字ですべて記述できた: 108, 18, 1008. インド記数法(算術)は8世紀頃アラビアに伝えられ, その後ヨーロッパに伝えられていったらしい. 現在我々が通常用いている数字をインド・アラビア数字と呼ぶ.

4. 減法と除法

2つの自然数 a, b をとってくると, a が b より大きい, b が a より大きい. ここで, 「 a が b より大きい」を $a > b$, または, $b < a$ と書き表す. $>$, $<$ を不等号という. $a \leq b$ は, $a = b$ または, $a < b$ を表すとする.

定義 4.1. $b < a$ を満たす2つの自然数 a, b にたいして, $a + c = b$ となる $c \in \mathbb{N}$ を, $c = b - a$ と表す. この演算を減法という.

注意 4.2. $a > b$ に対しては, $b - a$ はこの段階では定義されていない.

定義 4.3. 2つの自然数 a, b に対して, $a \times c = b$ となる $c \in \mathbb{N}$ を, $c = b \div a$, または, $c = \frac{b}{a}$ と表す. この演算を除法という. c は一般には定まらないが, c が定まるとき, b が a で割り切れるという. そうでないときは余りがでる. 実際次のことが成立する.

定理 4.4. 2つの自然数 a, b に対して

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

となる q, r が一意的に定まる.

(証明) $a = bq$ または, $bq < a < b(q + 1)$ となる $q \in \mathbb{N}$ が存在する.

$a = bq$ のとき, $r = 0$ ととれる.

$bq < a < b(q + 1)$ のとき, $a > bq$ より, $r = a - bq \in \mathbb{N}$. また, $a < b(q + 1) = bq + b$ より, $r = a - bq < b$.

一意性について: 今 $a = bq + r = bq' + r'$ ($0 \leq r, r' < b$) が存在したとする. $q \neq q'$ とすると, $q > q'$ または, $q < q'$. $q > q'$ とすると, $bq - bq' = b(q - q') = r' - r > 0$. $q - q' \geq 1$ より, $r' - r \geq b$. ところで, $0 \leq r, r' < b$ より, $r' - r < b$ なので矛盾. 同様に, $q < q'$ としても矛盾が導かれるので, このことより, $q = q'$ となる. よって,

$$r = a - bq = a - bq' = r'$$

となり, 一意性が示せた. $\square$

注意 4.5. 定理 4.4 の証明にあるように, 証明したい主張を否定して (上では, $q \neq q'$) 矛盾を導き, 主張が正しい (上では, $q = q'$) を証明する方法を背理法という. この様な証明法は, 古代ギリシア (紀元前 8 世紀頃) タレス ($BC625$ 頃 $\sim BC547$ 頃) からなされたとされている.

問題 2. 任意の自然数 n に対して $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ が 9 で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

5. 整数

2つの自然数 a, b が $a < b$ のとき, $a - b$ はもはや自然数の世界では考えられない. そこで数の拡張を行うことになり, マイナス ($-$) という概念をが導入された. 例えば, 中学生の教科書では, 温度計を取り上げ, 0 を基準に $+5, -3$ の読み方を説明している. $+5$ というのは, 数え上げのとき 5 と同じではあるが, そうでないときは, 0 (基準点) からの距離を表すことになり, 量の意味が異なる. マイナスは, 当初, 借金 の記述をするのに用いられたようだが, $-(-3), (-1) \times (-1)$ をどのように解釈するかで混乱を巻き起こした. そのような量にこだわらず, 抽象的に数の世界を拡張していくことにより, そのような混乱を避けることができる.

定義 5.1. a を自然数とすると, $a + c = 0$ となる c を a の逆元といい, $c = -a$ と書き表す.

注意 5.2. 逆元は一意的に定まる.

上の定義にある c をどのように構成するかが問題になるが, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の集合に適当なルールを用いて構成できる. ([4] 参照)

$0+0=0$ より $-0=0$ が導かれる. この様に定義された $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ を整数といい, 整数全体を $\mathbb{Z}$ で表す. 自然数で成立する演算を $\mathbb{Z}$ 上に拡張すると, 次のことが成立する.

記号 $(-1) \times a = -a$ と書き表す.

命題 5.3. a を自然数とする.

- (1) $(-1) \times 0 = 0$
- (2) $-(-a) = a$
- (3) $(-1) \times (-1) = 1$

(証明)(1) $(-1) \times 0 = (-1) \times (0 + 0) = (-1) \times 0 + (-1) \times 0$. 0 でない整数 a は, $a + a \neq a$ より, $(-1) \times 0 = 0$ となる.

(2) $0 = a + (-a) = (-a) + a$ (交換法則) より, a は, $(-a)$ の逆元になる. よって, $a = -(-a)$.

(3) $(-1) \times (1 + (-1)) = (-1) \times 0 = 0$. よって, 結合法則より, $(-1) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$. これから, $(-1) \times (-1)$ は, $(-1) \times 1 = -1$ の逆元より, (2) から $(-1) \times (-1) = -(-1) = 1$. □

上の (3) より, 借金 $\times$ 借金 = 利益というパラドックスは説明できる.
中学校で習ったように, 整数は直線上に図示化できる:

記号 数直線上の整数 n の 0 からの距離を $|n|$ で表す:

$$|n| = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ -n & n < 0 \end{cases}$$

6. 倍数, 約数, 素数

定義 6.1. a を整数とする. このとき, ka (k は整数) は, a の倍数という.

特に, $2k$ を偶数, $2k+1$ を奇数という.

0 は偶数であることに注意する.

定義 6.2. 整数 a, b に対して, a が b で割り切れるとき, すなわち, $a = bq$ (q は整数) と書き表せるとき, b を a の約数という.

定義 6.3. 2 つ以上の整数 $a, b, \dots$ に共通な倍数をそれらの公倍数という. 0 でない絶対値をとったときの最小の公倍数を最小公倍数という.

同様に, 2 つ以上の整数 $a, b, \dots$ に共通な約数をそれらの公約数という. その中の最大の公約数を最大公約数という. $a_1, a_2, \dots, a_n$ の最大公約数を $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ と書き表す.

次の定理は基本的である.

定理 6.4. a, b を正の整数とし, その最小公倍数を l , 最大公約数を m とすると, $ab = lm$ が成立する.

(証明) l は, a, b の公倍数より, $l = ab' = ba'$ となる整数 a', b' が存在する. ab は, l の倍数より, $ab = dl$ となる整数 d が存在する. よって

$$ab = dba' \text{ となるので, } a = da'.$$

$$ab = dab' \text{ となるので, } b = db'.$$

これから, d は, a, b の公約数であることがわかる.

m は最大公約数より, $m = de$ となる整数 e が存在する. (何故か?) このとき $e = 1$ となることがいえる.

実際, もし $e \neq 1$ とすると, a は m で割り切れるより, $a = ma''$ と書き表され ($a'' \in \mathbb{Z}$),

$$da' = a = ma'' = dea''$$

から, $a' = ea''$. 同様に, $b' = eb''$ となる整数 b'' が存在する. よって,

$$l = ab' = aeb'', \quad l = ba' = bea''.$$

これから, l は, e で割り切れる, すなわち, $\frac{l}{e} \in \mathbb{Z}$. $e \neq 1$ より, $\frac{l}{e} < l$.

ところで, $\frac{l}{e}$ は, a, b の公倍数になるので (何故か?), l より小さい a, b の公倍数 $\frac{l}{e}$ が存在し, これは l の最小性に矛盾. よって, $e = 1$ となる.

これから, $m = de = d$ がいえるので, $ab = dl = ml$ となり証明が終わる. $\square$

問題 3. 定理 6.4 の証明の中の「何故」の理由を考察せよ.

注意 6.5. 定理 6.4 から, 2 つの整数 a, b の最小公倍数を求めるには最大公約数を求めればよいことがわかる. 最大公約数を求める方法は次のユークリッドの互除法を用いればよいことが古くから知られている.

定理 6.6. (ユークリッドの互除法) 2 つの整数 a, b の最大公約数は, 次のアルゴリズムで求められる:

$$b = aq_1 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < a)$$

$$r_1 = 0 \text{ ならば } (b, a) = a.$$

もし $r_1 \neq 0$ ならば

$$a = r_1q_2 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1) \text{ を考える.}$$

$$r_2 = 0 \text{ ならば } (b, a) = (a, r_1) = r_2$$

もし $r_2 \neq 0$ ならば

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad (0 \leq r_3 < r_2) \text{ を考える.}$$

以下繰り返して

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} \text{ まで計算する.}$$

このとき求める最大公約数は, r_n となり, 関係式

$$(b, a) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

が成立する.

(証明)

定理 4.4 より, $b = aq_1 + r_1$ ($0 \leq r_1 < b$) となる, $q_1 \in \mathbb{Z}$ がとれる. このとき, $(b, a) = (a, r_1)$ が成立することを示す.

$(b, a) = d_1, (a, r_1) = d_2$ とすると

$$\begin{cases} b &= d_1 b' \\ a &= d_1 a' \end{cases} \quad \begin{cases} a &= d_2 a'' \\ r_1 &= d_2 r'_1 \end{cases}$$

となる整数 b', a', a'', r'_1 がとれる.

$$\begin{aligned}
 b &= aq_1 + r_1 \\
 &= d_2 a'' q_1 + d_2 r'_1 \\
 &= d_2 (a'' q_1 + r'_1)
 \end{aligned}$$

よって, d_2 は b の約数となるので, 関係式より, a, b の公約数になる. 故に, $d_2 \leq (b, a) = d_1$.

逆に,

$$\begin{aligned}
 b &= d_1 b' = aq_1 + r_1 \\
 &= d_1 a' q_1 + r_1
 \end{aligned}$$

よって, $r_1 = d_1(b' - a' q_1)$ となるので, d_1 は, r_1, a の公約数となる. 故に, $d_1 \leq (a, r_1) = d_2$.

よって, $d_1 = d_2$.

これから,

$$(b, a) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n)$$

が導かれる. n が十分大きければ, $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$ となるので, $(r_{n-1}, r_n) = r_n$ となり, 求める最大公約数 (b, a) は r_n となる. $\square$

例題 6.7. (1) $(100, 120) = 20$.

(解答)

$$120 = 100 \times 1 + 20$$

$$100 = 20 \times 5$$

よって, $(100, 120) = 20$ $\square$

(2) $(350, 1155) = 15$.

(解答)

$$1155 = 350 \times 3 + 105$$

$$350 = 105 \times 3 + 35$$

$$105 = 35 \times 3$$

よって, $(350, 1155) = 15$.

問題 4. (1) $(299, 31)$ を求めよ.

(2) 67 と 137 の最小公倍数を求めよ.

(3) 42 と 99 の最小公倍数を求めよ.

例題 6.8. n を整数とすると, $n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数であることを証明せよ.

(証明) n を奇数とすると, $n+1$ は偶数. よって, $n(n+1)(n+2)$ は, 偶数, すなわち 2 の倍数である. ところで, 連続する $n, n+1, n+2$ のうちどれかは 3 の倍数より, $n(n+1)(n+2)$ は, 3 と 2 を約数として持つ. よって, $3 \times 2 = 6$ の倍数となる. $\square$

問題 5. (1) n が奇数ならば, $n^2 - 1$ は, 8 で割り切れることを証明せよ.

(2) n を整数とする. このとき, $2n^3 - 3n^2 + n$ は 6 の倍数であることを証明せよ.

(3) 連続する 3 つの奇数の平方の和から 11 を引いた数は, 24 の倍数であることを証明せよ.

定義 6.9. 1 以上の正の整数 a で 1 と a 以外の約数 (因数) を持たない整数を素数という.

1, 2, 3, 5, 7, 11, ... は素数の例であるが, 次の定理が示すように素数は無限個存在する.

定理 6.10. 素数は無限個存在する.

(証明) 素数が有限個しか存在しないと仮定し, その最大素数を p とする. 今 $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1$ と考える. a が素数とすると $p < a$ となるので, p の最大性に矛盾する. よって a は素数ではない.

a は素数でないので, a はある素数 q で割れる. このとき, $q > p$. なぜなら, $q \leq p$ とすると, $a = ql = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1$ ($l \in \mathbb{Z}$) より,

$$q(l - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p) = 1$$

となり, 1 が素数であることに矛盾する. よって $q > p$ より再び p の最大性に矛盾する.

故に, 最大素数は存在しないことになり, 素数は無限個存在することが示された. $\square$

素数は整数の世界で次の定理が示すとおり重要な概念であることがわかる.

定理 6.11. 任意の正の整数 x に対して, ある素数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ と自然数 $e_1, e_2, \dots, e_n$ が存在して,

$$x = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$$

と一意的に分解できる. $p_1, p_2, \dots, p_n$ を x の素因数, この表現を素因数分解という.

(証明) 略

$\square$

問題 6. 次の整数を素因数分解せよ.

99, 256, 2006.

7. 等式

定義 7.1. 数, 文字, 式を “=” で結んだ式を等式という.

例題 7.2.

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= 5 \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

などが例である.

等式の中で $x + 3 = 10$ のように未知数 x を求めるための等式を方程式という. ユークリッドの互除法に応用して次のディオファントスの方程式がある.

定義 7.3. a, b, c を整数とする. このとき $ax + by = c$ を満たす整数 x, y を求める方程式を 1 次ディオファントス方程式という.

a, b の最大公約数 (a, b) を d とすると, ある整数 $k, l \in \mathbb{Z}$ が存在して $ak + bl = d$ を満たす. (何故か) また $c \neq d$ も d を約数としてもつ. ($ax + by = c$ よりいえる) より, $c = dq$ となる整数 $q \in \mathbb{Z}$ が存在する. よって,

$$a(kq) + b(lq) = (ak + bl)q = dq = c$$

故に, $x_0 = kq, y_0 = lq$ が方程式の解になる. (x_0, y_0 を特殊解という.) 一般に,

$$x = x_0 + \frac{rb}{(a, b)}, y = y_0 - \frac{ra}{(a, b)} \quad (r \text{ は任意の整数})$$

が方程式の一般解となる. 実際,

$$\begin{aligned} ax + by &= ax_0 + a \frac{rb}{(a, b)} + by_0 - b \frac{ra}{(a, b)} \\ &= ax_0 + by_0 = c \end{aligned}$$

より主張がいえる.

例題 7.4. $3x + 6y = 22$ が整数解 x, y を持つかどうか判定せよ.

(証明) 3 と 6 の公約数は 3. しかし, 22 は 3 を約数に持たないので, 上の考察より整数解は存在しない. □

問題 7. 次のディオファントスの方程式の整数解を調べよ. 整数解があれば一組挙げよ.

$$(1) 3x - 4y = 29 \quad (2) 11x + 12y = 58 \quad (3) 153x - 34y = 51$$

例題 7.5. 次の連立方程式の整数解を求めよ.

$$\begin{cases} (x - y + z)(x - z) = 7 & (1) \\ x + y + z = 1 & (2) \end{cases}$$

(証明)(2) より $z = 1 - x - y$. これを (1) に代入して

$$(1 - 2y)(2x + y - 1) = 7$$

x, y は整数より, $1 - 2y, 2x + y - 1$ は整数. 7 は素数に注意すると,

$$\begin{cases} 1 - 2y = 1 \\ 2x + y - 1 = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 2y = -1 \\ 2x + y - 1 = -7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2y = 7 \\ 2x + y - 1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 2y = -7 \\ 2x + y - 1 = -1 \end{cases}$$

の 4 通りが考えられる. x, y, z は整数より, $(x, y, z) = (4, 0, 3), (-2, 4, -1)$. □

問題 8. $xy - 2x - y = 2$ を満たす正の整数解を求めよ.

8. 有理数

a, b が自然数であるとき $a \times c = b$ となる自然数 c を $b \div a$ または, $\frac{b}{a}$ とあらわすと導入したが, 一般に c は整数にとれない. そこで再び数の拡張をする必要が出てくる. 分数 $\frac{b}{a}$ (a, b が自然数) の表示は古代エジプトですでに用いられていた. 定義は, ある長さを a 等分して, その b 倍を意味する. 以外のことだが, 古代ギリシアでは, $b : a$ という比の概念しかなかったようである. 現代数学では, 整数から有理数を構成する.

定義 8.1. $a, b (\neq 0)$ でない整数に対して, $\frac{a}{b}$ と表示されるもので次の同値関係を満たすものを有理数という. 有理数全体を $\mathbb{Q}$ と表す.

整数 $a, b (\neq 0), c, d (\neq 0)$ に対して, $ad = bc$ のとき, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ と定義する.

この定義により, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ などが示せる.

整数 a に対して, a と $\frac{a}{1}$ を同一視し, $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Q}$ の中に埋め込む.

$\mathbb{Q}$ 上の加法と乗法を次のように定義する.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

このとき整数同様次の法則が成立する.

定理 8.2. $a, b (\neq 0), c, d (\neq 0), e, f (\neq 0)$ を整数とする. このとき次が成立する.

- (1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}, \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ (交換法則)
- (2) $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}), (\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} \times \frac{e}{f})$ (結合法則)
- (3) $\frac{a}{b}(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$ (分配法則)

問題 9. 上の定理を証明せよ.

整数と同様に, 有理数 x に対して, $-x$ を, $x + y = 0$ となる有理数 y のことを表すとする.

問題 10. 有理数 $\frac{a}{b}$ に対して $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$ が成立することを証明せよ.

例題 8.3. ある量にその $\frac{1}{7}$ を加えると $\frac{1}{19}$ になる. ある量を求めよ.

(証明) 求める量を x とおくと, 一次方程式

$$x + \frac{1}{7} = \frac{1}{19}$$

が成立する. よって,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{19} - \frac{1}{7} \\ &= \frac{7 - 19}{7 \times 19} \\ &= \frac{-12}{133} \end{aligned}$$

□

問題 11. ディオファントスの没年齢を次の文章より求めよ.

「ディオファントスは一生の $\frac{1}{6}$ を少年時代として過ごし, その後, 一生の $\frac{1}{12}$ はひげを頬に蓄え, さらに一生の $\frac{1}{7}$ を経たあと, 結婚した. 結婚して 5 年後に息子が生まれた. 息子は父の一生の半分を生き, 父は息子の 4 年後に死んだ.」

問題 12. 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ 10x + 9y = 13 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + 2y + z = 12 \\ x + y + z = 2 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

有理数 $\mathbb{Q}$ 上の除法を次のように定義する.

定義 8.4. 有理数 x, y, z に対して

$$x \times z = y$$

となる z を $y \div x$ と定義する. 整数の場合に述べたように $x \neq 0$

命題 8.5. $a, b(\neq 0), c, d(\neq 0)$ の整数に対して

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

が成立する.

(証明) 定義より, ある有理数が存在して, $z = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ は,

$$\frac{c}{d} \times z = \frac{a}{b}$$

を満たす. $\frac{c}{d} \neq 0$ より, $c \neq 0$ であることに注意する.

両辺から $\frac{d}{c}$ をかけると

$$\begin{aligned} \frac{d}{c} \times \left(\frac{c}{d} \times z \right) &= \frac{d}{c} \times \frac{a}{b} \\ \left(\frac{d}{c} \times \frac{c}{d} \right) \times z &= \frac{ad}{bc} \\ \frac{cd}{cd} \times z &= \frac{ad}{bc} \\ z &= \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

□

9. 不等式

整数に a, b に対して, a が b より大きいとき, $a > b$, または, $b < a$ と表す. このとき $a - b$ は正の整数であり, $a - b > 0$ と表す. 同様に, $a - b < 0$ は, $a - b$ が負の整数であることを表す.

a, b が, $a = b$, または, $a < b$ のとき, $a \leq b$ と表す.

x, y が有理数であるとき, $x + y$ も再び有理数になるが, そこで $y > x$ ($x < y$) を, $y - x \in \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$ と定義すると, $>$ は, 次の性質を満たす. この定義は, 整数における $<, >$ の使い方を踏まえていることに注意する.

定理 9.1. x, y を有理数で $x < y$ とする.

- (i) 任意の有理数 z に対して, $x + z < y + z$.
- (ii) 任意の $\alpha > 0$ の有理数に対して, $\alpha x < \alpha y$.
- (iii) 任意の $\alpha < 0$ の有理数に対して, $\alpha x > \alpha y$.

(証明)(1)

$$\begin{aligned} (y + z) - (x + z) &= (y + z) + (-x - z) \\ &= (y + z) + (-z - x) \\ &= ((y + z) + (-z)) + (-x) \\ &= y + (-x) = y - x > 0 \end{aligned}$$

(2) $\alpha > 0$ より, $\alpha = \frac{c}{d}$ ($c, d \in \mathbb{N}$). $y - x > 0$ より, $y - x = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$). よって

$$\begin{aligned} \alpha y - \alpha x &= \alpha(y - x) \\ &= \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{bd} \end{aligned}$$

$ac, bd \in \mathbb{N}$ より, $\alpha y - \alpha x > 0$.

(3) 演習

□

問題 13. 上の定理 9.1(iii) を証明せよ.

x, y が有理数であるとき, $y \geq x$ ($x \leq y$) を, $y - x \in \{0, \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ と定義する. このとき, $\mathbb{Q}$ は, $\geq$ で順序構造を持つという.

定義 9.2. 記号 $<, >, \geq, \leq$ のことを不等号といい, 不等号を用いて表された数や式の関係式をのことを不等式という.

例えば, $2 < 3$, $2ab < a^2 + b^2$ (a, b は, 有理数) などは, 不等式の例である.

不等式においては次は基本的な性質である.

命題 9.3. x, y を有理数とする.

- (i) $x^2 \geq 0$.
- (ii) $x^2 = 0$ ならば, $x = 0$. またこのときに限り等号が成立する.
- (iii) $x^2 + y^2 = 0$ ならば, $x = y = 0$. またこのときに限り, 等号が成立する.
- (iv) $x \geq 0, y \geq 0$ とする. このとき, $x \geq y$ であることと $x^2 \geq y^2$ であることは同等である.
- (v) $|x| < y$ ならば, $-y < x < y$. 但し, $|x| = \begin{cases} x & \text{もし } x \geq 0 \\ -x & \text{もし } x < 0 \end{cases}$

問題 14. 上の (i) ~ (v) を証明せよ.

例題 9.4. x, y を有理数とする.

$$2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$$

が成立することを証明せよ. また, 等号はいつ成立するか判定せよ.

(証明)

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2) - (x + y)^2 &= 2(x^2 + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x^2 + y^2 - 2xy \\ &= (x - y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって, $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$.

上の証明より, 等号が成立することと $(x - y)^2 = 0$ であることは同等である. よって, 命題 9.3(ii) より, $x = y$ が等号が成立する条件. □

問題 15. 次の不等式を証明せよ. また等号条件を求めよ.

- (1) $a > 0, b > 0$ のとき, $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ が成立する.
- (2) $x > 0, y > 0$ のとき, $x^3 + 2y^3 \geq 3xy^2$ が成立する.

例題 9.5. $x + 3y + 5z = 12$ を満たす正の整数を求めよ.

(解答) $x \geq 1, 3y \geq 3$ より,

$$5z = 12 - x - y \leq 12 - 1 - 3 = 8.$$

よって, $z = 1$. 故に与式は $x + 3y = 7$ となる.

$$3y = 7 - x \leq 7 - 1 = 6$$

より, $y = 1$ または $y = 2$. $y = 1$ のとき, $x = 4$. $y = 2$ のとき $x = 1$. 故に求める解は

$$(x, y, z) = (4, 1, 1), (1, 2, 1).$$

□

問題 16. $x \leq y \leq z, x + y + z = 16, xyz = 128$ を満たす正の整数 x, y, z を求めよ.

問題 17. (1) 任意の自然数 a, b に対して, ある自然数 n で, $a < nb$ となるものが存在することを証明せよ.

(数学的帰納法を用いる)

(2) (アルキメデス性)

任意の正の有理数 x, y に対して, ある自然数 n で, $x < ny$ となるものが存在することを証明せよ.

((1) を利用する)

(3) (有理数の稠密性)

任意の有理数 x, y に対して, ある有理数 z で, $x < z < y$ となるものが存在することを証明せよ.

注意 9.6. (3) より, 数直線上で有理数は十分たくさん隙間無く分布しているように思える. しかし, 次の節で示すように有理数でない数が存在し, 有理数間には隙間があることがわかる. 実は, 有理数でない数は, 有理数より非常に多く存在する.

10. ピタゴラスの定理と実数

古代オリエント (バビロニア, エジプト, 紀元前 2000 年頃) の数学は, 例えばナイル川の氾濫のための土地の区画, 測量など日常生活に生じる算術問題の解法, 図形の面積, 立体の体積, 三平方の定理など実用的な数学が発達していたが, 理論的な考察はなされていなかった. 伝えによると, ギリシア人のタレス (BC625 頃-BC547 頃) エジプトに赴き, 幾何学をギリシアにもたらし, その技術の原理を追求し, 原理から新しい知識 (定理) を導くスタイルを確立したといわれている. その集大成がユークリッドの原論 ([3]) である.

次の有名な三平方の定理も古代オリエントで知られていたが, ピタゴラス (BC560 頃-BC480 頃) により証明を与えられたと考えられ, ピタゴラスの定理とも呼ばれている.

定理 10.1. 直角三角形の直角をはさんでの 2 辺の長さを a, b , 斜辺の長さを c とすると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成立する.

証明はよく知られているので略するが, a, b, c が整数であるとき, 定理内の関係式を満たす (a, b, c) をピタゴラス数という.

例 10.2. ピタゴラス数の例: $(a, b, c) = (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), \dots$

17 世紀フェルマー (1601 – 1665) は, アレキサンドリア時代のディオファントス ($BC250$ 頃) の本「数論」の愛読者であったらしいが, その本の余白に次の定理を書き残した.

定理 10.3. (フェルマーの最終定理) n を 2 より大きい整数とする. このとき $x^n + y^n = z^n$ を満たす正の整数組 (x, y, z) は存在しない.

フェルマーは, 「上の定理の証明はできたが, この余白はその証明を書くにはせますぎる」と残した. これが数学者を 350 年以上悩ませた問題で, 多くの大数学者や数論おたくが挑んだ. 私が都立大に在籍していた頃 (1988 – 1992), 都立大の宮岡先生が解けたというニュースが世界中を駆けめぐり, 世界中の注目の的になったが結果的には解決に到らなかった. 1994 年にカナダのフィールズ研究所に博士研究員として滞在していた秋, イギリスの数学者アンドレ・ワイルズ氏が解決したというニュースが流れたとき, 研究所の中には「まだ解決されたとは限らない」という T-シャツを着ていた人もいた. しかし, 1995 年に証明のギャップを埋めて, アンドレ・ワイルズ氏がついに解決をした.

問題の簡明さに比較して証明はすこぶる難しい理論を用いる. 逆にこの問題解決のために「数論」という分野が発展したとあって良い. 現在世界の何人の方が真にこの定理の証明を理解しているか疑問である (95 年には 3 人だったらしい).

幸運にもコペンハーゲン大学に研究員として滞在していた 1996 年に, 私はワイルズ氏にであった.

話をピタゴラス数にもどす. ピタゴラスはピタゴラス学派という教団をつくり, 「万物の根元は数である」とであるという教義を掲げていたが, 最初は (今の言葉いうと) 分数の範囲でしか数を認識していなかった. 古代ギリシアでは, 分数という概念はなく, 「比」という概念を用いて線分の長さを測っていた. すなわち, 2 つの線分 a_0, a_1 が同じ単位 e によって「通約」できるとは, ある自然数 m, n が存在して $a_0 = me, a_1 = ne$ となっていることをいう. この様に, 線分の比 $a_0 : a_1$ を自然数の比 $m : n$ に関連づけた. ピタゴラス学派は, すべての線分比は通約可能であると信じていたらしいが, 教団のヒッパソスにより通約不可能な線分の存在が指摘され, 有理数でない数 (無量数, 無理数) が発見された.

例 10.4. $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 90^\circ$) において $AB : AC = m : n$ ($m, n \in \mathbb{N}$ で共通因子なし) と通約可能であると仮定する.

ピタゴラスの定理より $m^2 + m^2 = n^2$. よって $2m^2 = n^2$. $2m^2$ は偶数より, n^2 は偶数, 故に, n は偶数. $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) と書き表すと,

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2.$$

よって, $m^2 = 2k^2$ となるので, m が偶数になることがいえる.

m, n 共に偶数であるので, 共通因子 2 をもち仮定に反する. よって, AB, AC は通約可能ではない. $\square$

$\sqrt{2}$ を, 2 乗して 2 になる数と定義すると, $\sqrt{2}$ は, ab, ac の長さが 1 であるときの直角三角形 $\triangle ABC$ の斜辺の長さと等しい. よって, $\sqrt{2}$ は有理数でないことがわかる.

実際 $\sqrt{2} : 1 = m : n$ を満たす自然数は存在しない. すなわち, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ とはならない.

定義 10.5. x を正の整数とするとき, $\sqrt{x}$ を, 2 乗して x となる数とする.

問題 18. (1) $\sqrt{3}$ が有理数でないことを証明せよ.

(2) $\sqrt{5}$ が有理数でないことを証明せよ.

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が有理数でないことを証明せよ.

(4) x が平方数でなければ (すなわち, ある $y \in \mathbb{Z}$ で $x = y^2$ と書けない) ならば, $\sqrt{x}$ は有理数ではないことを証明せよ.

有理数でない数が存在することがわかり, しかも現実にその長さを持つ線分が存在するので, この新しい数をどのように定義をするかが問題になる. 厳密な定義は, 18 世紀のデデキント (1831 – 1916), カントール (1845 – 1918) まで待たなければならない. ここでは直感的に次のように定義する.

定義 10.6. 実数とは, 実在する量の測定値, または, 数直線上に目盛られるすべての数のことをいう. 実数全体を $\mathbb{R}$ で表す.

有理数で無い実数を無理数という.

注意 10.7. $\mathbb{Q}$ 上の演算, 順序構造が $\mathbb{R}$ 上に拡張される. しかしその議論は簡単ではなく, 19 世紀の大きな問題の 1 つであった.

有名な無理数の実数を取り上げる.

例 10.8. (黄金分割) 長さ 1 を持つ線分 AB を $AB : AC = AC : CB$ と内分する点を C とし, AC の長さを x とおく. このとき,

$$1 : x = x : 1 - x$$

より, $x^2 = 1 - x$, すなわち, $x^2 + x - 1 = 0$ の方程式が導かれる.

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} &= 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\ x + \frac{1}{2} &= \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x &= \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}\end{aligned}$$

と変形できる. $x > 0$ より, $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ となる. この分割を黄金分割という.

例 10.9. (パイ π) 円において, 直径と円周の比を π という. つまり, 直径 1 の円周の長さが π となり, 円を原点から数直線上で転がすことにより, 数直線上に π を記述することができる. π は有理数ではないが, その証明は難しい. 1766 年にスイス人ランベルト (1728 – 1777) が π が無理数であることを最初に証明した. より簡明な証明は, 1947 年ニヴェンにより与えられている. 日本人の岩本氏は π^2 は無理数であることの証明を 1949 年に提出している. (π^2 が無理数ならば, π も無理数になる)

π は魅力的な数であり, 多くの人に調べられたたくさんの公式がつけられている. 例えば, 収束性についてはまだ触れていないが,

$$\begin{aligned}(\text{ライプニッツ}) \quad \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ (\text{ウォリス}) \quad \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \\ (\text{オイラー}) \quad \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

例 10.10. (ネイピア数 e) 利息の複利計算において現れるネイピア数 e も無理数である.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

次の小数表示を導入することにより実数をより理解することができる.

定義 10.11. 実数 x を次のように展開する

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

このとき, $x = a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$ と表示し, x の 10 進小数表示という.

$x = a_0.a_1a_2\cdots a_k$ と表示できるとき、小数点以下第 k 位で表示される有限小数という。そうでない小数を無限小数という。無限小数のうち $0.333333\cdots$, $0.123123123\cdots$ のように繰り返す小数を循環小数という。

このとき実数の世界は次のようになる

$$\text{実数} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \begin{cases} \text{有限小数} \\ \text{循環小数} \end{cases} \\ \text{無理数} & \text{非循環小数} \end{cases}$$

π は、古代オリエントの時代から近似値が求められていた。例えば、アルキメデス ($BC287 - BC212$) は、正 96 角形を用いて π の近似値 3.14 を求め、日本の建部賢弘 (1664–1739) は、小数点以下第 41 桁まで正確に求めている。近年は、コンピュータの性能を見るため π の近似値の計算が行われている。(2003 年の段階で、日本の金田氏らにより、1,241,100,000,000 桁まで求められた。http://hp.vector.co.jp/authors/VA014765/pi/ を参照。)

問題 19. (1) $\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}$ の循環小数表示を求めよ。

(2) 既約分数 $\frac{b}{a}$ (a, b に、1 以外の公約数を持たない) が有限小数ならば、 a は 2 と 5 以外約数を持たないことを証明せよ。

例 10.12. (1) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{8}$ を簡単な形にせよ。

(2) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{8} - \sqrt{6}$ のとき、 x, y の大小関係を調べよ。

(解答)(1)

$$\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

(2) $x > 0, y > 0$ に注意する。

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x - y)(x + y) \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{8} + \sqrt{6})(x + y) \quad (i) \\ (\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{8} + \sqrt{3})^2 &= 5 + 2\sqrt{30} + 6 - (8 + 2\sqrt{24} + 3) \\ &= 2(\sqrt{30} - \sqrt{24}) > 0 \quad (ii) \end{aligned}$$

(ii) より、 $\sqrt{5} + \sqrt{6} > \sqrt{8} + \sqrt{3}$ なので、(i) から、 $x^2 - y^2 > 0$ 、すなわち、 $x > y$ がいえる。(9.3(iv) 参照) $\square$

問題 20. (1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\boxed{\mathcal{A}}}{2}$ とするとき、 $\boxed{\mathcal{A}}$ を求めよ。

(2) $\sqrt{6} + \sqrt{7}$, $\sqrt{26}$ の大小関係を調べよ。

(3) $x = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき、 $x + y, xy, \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ を計算せよ。

- 問題 21.** (1) $x + y + z = 0, yz + zx + xy = 1, xyz = -1$ のとき, $x^2 + y^2 + z^2, y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2, x^4 + y^4 + z^4$ の値を求めよ.
- (2) $x > 0, x - \frac{1}{x} = 1$ のとき, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ の値を求めよ.

11. 2 次方程式 (ディオファントス型)

今 実数 b, c が与えられていて $\begin{cases} x + y = b & \cdots (1) \\ xy = c & \cdots (2) \end{cases}$ の関係式を満たしたとする.

さらに, $\frac{b^2}{4} - c \geq 0$ を仮定し (この条件が必要な理由はあとでわかる), これを満たす x, y を求めよう. (1) より $y = b - x$ であるので, これを (2) に代入すると $x(b - x) = c$, すなわち,

$$\begin{aligned} -x^2 + bx &= c \\ x^2 - bx + c &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる. 黄金分割のときの説明のように, この式を x についての 2 次方程式という. これから

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c &= 0 \\ \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{b^2}{4} - c \cdots (3) \end{aligned}$$

となり, $\frac{b^2}{4} - c \geq 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned} x - \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \text{ または } -\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \\ x &= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \text{ または } \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \end{aligned}$$

となる. ($x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ とも書く.)

逆に $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$, $y = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ のとき, x, y は上記 (1), (2) を満たす. 故に, 求める解は, $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$, $y = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

定義 11.1. 2 次式 $x^2 + bx + c$ が $x^2 + bx + c = (x + d)^2$ ($b, c, d \in \mathbb{R}$) と変形できるとき, 完全平方式になるという.

問題 22. (1) 上の方法を用いて和が 7, 積が 2 となる 2 つの実数を求めよ.

(2) 2 次式 $x^2 - 2(k - 1)x + 2k^2 - 6k + 5$ が完全平方式に成るための k の値を求めよ.

例 11.2. 実数 $a \neq 0$, d, k が, 等式 $x^2 - 2kax + 3a^2 = (x - d)^2$ を満たすとする. このとき, k の値を求めよ.

(解答) 両辺を展開して

$$x^2 - 2kax + 3a^2 = x^2 - 2dx + d^2.$$

よって, $2x(d-ka) = d^2 - 3a^2$. $x = 0$ を代入して, $d^2 - 3a^2 = 0$. すなわち, $d = \pm\sqrt{3}a$.
よって, $2x(d-2ka) = 0$. $x = 1$ を代入して, $d - 2ka = 0$. よって

$$2ka = d = \pm\sqrt{3}a$$

$$a \neq 0 \text{ より}$$

$$k = \pm\sqrt{3}$$

逆に, $k = \pm\sqrt{3}$ のとき,

$$\begin{aligned} x^2 - 2kax + 3a^2 &= x^2 \mp \sqrt{3}ax + (\sqrt{3})^2 a^2 \\ &= (x \mp \sqrt{3}a)^2 \end{aligned}$$

と完全平方化できる. 故に, 求める k の値は, $k = \pm\sqrt{3}$. □

問題 23. $x^2 + bx + c$ が完全平方式になるならば, $b^2 - 4c = 0$ が成立することを証明せよ.

問題 24. 2 次方程式 $x^2 - 3(k+1)x + k^2 - 5 = 0$ の解の 1 つが $x = -1$ のとき, 定数 k と他の解を求めよ.

問題 25. (ユークリッドの問題) 長さ 1 の線分 AB を, 次の条件を満たすように点 C で内分する. 線分 AC の長さを x としたとき, 線分 AC を一辺とする正方形の面積と線分 CB と AB の長さからなる長方形の面積が等しいとする. このとき x の値を求めよ.

12. 複素数

2 次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ で, $\frac{b^2}{4} - c < 0$ のときは, $\frac{b^2}{4} - c < 0$ の平方はとれないので, 当初は不可能量と呼ばれていた. 古代ギリシャの時代でも認識されていたようである. $i = \sqrt{-1}$ は, 3 次方程式の解法にまつわる話で有名なカルダノ (1501–1576) の本に次のような形で登場している: 「 $x(10-x) = 0$ の根は, $5 + \sqrt{-15}$ と $5 - \sqrt{-15}$ である」. カルダノは, $\sqrt{-15}$ を形式的数という表現を用いていた. その後, ボンベリ (1526–1572), デカルト (1596–1650), ニュートン (1643–1727), ライプニッツ (1646–1716) らが, 複素数 ($a + b\sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$) について触れている. オイラー (1707–1783) は, 1748 年に出版された本の中で「オイラーの公式」, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$ を導いている. 但し,

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots$$

である. ($\exp x$ は, ニュートンにより実数上で定義され, オイラーにより虚数上 $[\sqrt{-a}, a \in \mathbb{R}, a \neq 0]$ に拡張された) オイラーは虚数の取り扱いに苦労していた

が、複素数全体を平面上に実現させて (ガウス平面) 複素数に市民権を与えたのは、ガウス (1777 – 1855) である。実数の世界を拡張して、複素数の導入のメリットは、ガウスによる次の代数学の基本定理である。

定理 12.1. f を n 次の実多項式とする、すなわち、 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ($a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n$). このとき、ちょうど n 個の複素数 $z_1, z_2, \dots, z_n$ で $a_0 + a_1z_i + a_2z_i^2 + \cdots + a_nz_i^n = 0$ となるものが存在する。

これにより 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は、いつでも複素数の解 2 つ (のみ) 持つことがわかる。

定義 12.2. $\sqrt{-1} = i$ を虚数単位といい、実数 a, b に対して $a + bi$ を複素数という。特に、 $b \neq 0$ のとき、 $a + bi$ を虚数という。 $z = a + bi$ に対して a を z の実部、 b を z の虚部 (虚数部) という。

複素数の演算を実数の演算を含むように拡張する。

定義 12.3. 2 つの複素数 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) に対して

- (1) $z_1 = z_2 \iff a = c, b = d$.
- (2) $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- (3) $z_1 \times z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$. と定義する。

注意 12.4. $0i = 0$ と定義すると、任意の複素数 z に対して、 $z + 0 = z$ が成立する。

定義 12.5. 複素数 z に対して、 $z + w = 0$ となる複素数 w を $-z$ と定義する。 $+(-b)i = -bi$ と書く。

$z = a + bi$ のとき、 $-z = -a + (-b)i = -a - bi$ となる。実際

$$\begin{aligned} z + (-a + (-b)i) &= (a + (-a)) + (b + (-b))i \\ &= 0 + 0i = 0. \end{aligned}$$

定義 12.6. 複素数 $z = a + bi$ に対して、 $\bar{z} = a - bi$ とおく。 $\bar{z}$ を z の共役複素数という。

問題 26. 複素数 $z = a + bi$ に対して、 $z\bar{z} = \bar{z}z = a^2 + b^2$ が成立することを証明せよ。

実数の世界と同様に複素数でも次の演算が成立する。

定理 12.7. 複素数 z_1, z_2, z_3 に対して次の演算が成立する。

- (1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$ (交換法則)
- (2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$ (結合法則)
- (3) $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$

問題 27. 上の定理を証明せよ。

定義 12.8. 複素数 z_1, z_2 に対して、 $z_2 \times w = z_1$ となる w を $\frac{z_1}{z_2}$ と定義する。

注意 12.9. 定義 12.8 の w は一意的に定まる.

$$\begin{aligned}
 z_1 &= a + bi, z_2 = c + di \text{ のとき, } w = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \text{ となる. 実際,} \\
 z_2 \times \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \right) &= (c+di) \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \right) \\
 &= \left(c \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - d \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right) + \left(c \frac{bc-ad}{c^2+d^2} + d \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right)i \\
 &= \frac{ac^2+bcd-bcd+ad^2}{c^2+d^2} + \frac{bc^2-acd+acd+bd^2}{c^2+d^2}i \\
 &= \frac{a(c^2+d^2)}{c^2+d^2} + \frac{b(c^2+d^2)}{c^2+d^2}i \\
 &= a + bi = z_1
 \end{aligned}$$

となるので, $w = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$. 特に, 任意の複素数 z に対して $\frac{z}{z} = 1$ となる. この等式を用いるとより直接的に w を計算できる.

$z_2 w = z_1$ より, $z_2 \bar{z}_2 w = z_1 \bar{z}_2$ が成立する. よって定義より $w = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$. 故に

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \\
 &= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \\
 &= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
 &= \frac{a(c^2+d^2)}{c^2+d^2} + \frac{b(c^2+d^2)}{c^2+d^2}i
 \end{aligned}$$

最後の等式は, 次の問題より成立することがわかる.

問題 28. 複素数 $a + bi$, 実数 α に対して

$$\frac{a+bi}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\alpha}i$$

が成立することを証明せよ.

問題 29. 次の式を計算し, $a + bi$ の形に直せ.

$$(1) \frac{3-2i}{3+2i} \quad (2) \left(\frac{2}{i} + i \right) \left(\frac{2}{i} - i \right) \quad (3) \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i} \quad (4) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{10} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{10}$$

例題 12.10. 次の等式は成立しないことを証明せよ. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\frac{5}{-2}}$.
(証明)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-2}} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}i} \\ &= \frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{2}ii} = -\sqrt{\frac{5}{2}}i\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{5}{-2}} &= \sqrt{-\frac{5}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}}i\end{aligned}$$

故に等号は成立しない. □

問題 30. 次の等式は成立するか判定せよ.

$$(1) \sqrt{2}\sqrt{-5} = \sqrt{2 \times (-5)} \quad (2) \sqrt{-5}\sqrt{-2} = \sqrt{(-5)(-2)}$$

例題 12.11. 複素数 $\frac{3+i}{3-i}$ の共役な複素数を求めよ.

(解答) $z = \frac{3+i}{3-i} = \frac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)} = \frac{9+6i-1}{9+1} = \frac{4+3i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$. よって, $\bar{z} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$. □

問題 31. 次の複素数の共役な複素数を求めよ.

$$(1) \frac{5}{2+i} \quad (2) \frac{1}{i}$$

問題 32. 次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ.

$$\frac{1}{2+i} + \frac{1}{x+yi} = \frac{1}{2}$$

13. 2 次方程式 (一般形)

虚数を用いることにより一般の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) を解くことができる:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c &= 0 \\
 a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c &= 0 \\
 a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 x &= \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots (\star)
 \end{aligned}$$

($\star$) を 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) の解の公式という.

例題 13.1. $6x^2 - x - 12 = 0$ の解を求めよ.

(解答)

解の公式より

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 6 \times (-12)}}{2 \times 6} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{12} \\
 &= \frac{1 \pm 17}{12} = \frac{3}{2} \text{ または } -\frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

問題 33. 次の 2 次方程式の解を求めよ.

- (1) $x^2 + 3x - 10 = 0$ (2) $2(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = 0$ (3) $(\sqrt{2}-1)x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$
 (4) $(x+1)(x+3) = x(9-2x)$

解の公式 ($\star$) の $D = b^2 - 4ac$ を 2 次方程式の判別式という. 解の公式より次のことが判別式 D を用いて導かれる.

命題 13.2. D を 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の判別式とする. このとき

- (1) $D > 0 \iff$ 2 次方程式は異なる実数解をもつ.
 (2) $D = 0 \iff$ 2 次方程式はただ一つの解 (重解) を持つ.
 (3) $D < 0 \iff$ 2 次方程式は共役な関係のある 2 つの虚数解を持つ.

但し, $a + bi$ で $b \neq 0$ を虚数という (定義 12.2 参照).

例題 13.3. 2 次方程式 $x^2 - 6x + 3 = 0$ の解を判別し, その解を求めよ.

(解答) 判別式を D とすると,

$$D = 36 - 12 = 24 > 0$$

より, 2 次方程式は異なる実数解を持つ. 解の公式より 求める解は, $x = 3 \pm \sqrt{6}$.

□

例題 13.4. $x^2 + \sqrt{3}(2 - k)x + k = 0$ が重解を持つように定数 k を求めよ.

(解答) 与えられた 2 次方程式が重解を持つためには, $D = 3(2 - k)^2 - 4k = 0$ を満たさなければならない. よって, 2 次方程式 $3k^2 - 16k + 12 = 0$ を k は満たさなければならない. このとき解の公式より, $k = 8 \pm 2\sqrt{7}$ となり, これが求める k の値である.

□

問題 34. 2 次方程式 $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ が重解を持つとき, 定数 m の値と方程式の解を求めよ.

問題 35. 等式 $x^2 - 2xy + 4y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$ を満たす実数 x, y を求めよ.

例題 13.5. a を定数とすると, 2 次方程式 $x^2 + 3x + 2a + 2 = 0$ の解を判別せよ.

(解答) 判別式を D とすると,

$$D = 9 - 4(2a + 2) = 1 - 8a.$$

$D = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$ より,

$a < \frac{1}{8}$ のとき 2 次方程式は異なる実数解を持つ

$a = \frac{1}{8}$ のとき 2 次方程式は重解を持つ

$a > \frac{1}{8}$ のとき 2 次方程式は 2 つの虚数解をもつ

□

問題 36. a を定数とすると, 次の 2 次方程式の解を判別せよ.

$$(1) 2x^2 - 2ax - a^2 + 3 = 0 \quad (2) x^2 - 2(a + 1)x + 2a^2 + 3 = 0$$

14. 解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の解は複素数までの数を広げると 2 つの解 α, β を持つことがわかるが, ディオファントスの問題にあるようにあるように, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ と 2 次方程式の係数 a, b, c との関係を導くことができる.

今 2 次式 $p(x) = ax^2 + bx + c$ を考えると, $p(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + c = 0$, $p(\beta) = a\beta^2 + b\beta + c = 0$ となるので, 後に勉強する因数定理より, $p(x)$ は, $(x - \alpha)(x - \beta)$ で割り切れる. すなわち, $p(x) = \gamma(x - \alpha)(x - \beta)$ が成立する. $p(x)$ の x^2 の係数は a より, $\gamma = a$ が導かれるので,

$$p(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

が成立する. すなわち,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta \end{aligned}$$

よって, $x = 0$ を代入して $c = a\alpha\beta$, すなわち,

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

また, $bx = -a(\alpha + \beta)x$ で, $x = 1$ を代入して $b = -a(\alpha + \beta)$, すなわち,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}.$$

よって, 次の定理が得られる.

定理 14.1. 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の解を α, β とすると,

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta &= \frac{c}{a} \end{cases}$$

が成立する. この関係式を解と係数の関係という.

例題 14.2. 2 次方程式 $x^2 - 8x + 6 = 0$ の 2 つの解を α, β としたとき次の値を求めよ.

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $(\alpha - \beta)^2$

(3) $\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\beta+1}$

(解答) 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 8 \\ \alpha\beta = 6 \end{cases}$$

であることに注意する.

(1)

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 8^2 - 2 \times 6 \\ &= 64 - 12 = 52. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\
 &= 8^2 - 4 \times 6 \\
 &= 64 - 24 = 40.
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta}{\alpha + 1} + \frac{\alpha}{\beta + 1} &= \frac{\beta(\beta + 1) + \alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} \\
 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha\beta + 1} \\
 &= \frac{52 + 8}{6 + 8 + 1} \\
 &= \frac{60}{15} = 4.
 \end{aligned}$$

問題 37. 2 次方程式 $2x^2 - 6x + 3 = 0$ の 2 つの解を α, β としたとき次の値を求めよ.

- (1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$
- (2) $\alpha^2 + \beta^2$
- (3) $\alpha^3 + \beta^3$
- (4) $\alpha^4 + \beta^4$
- (5) $\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta}$

問題 38. $x^2 + x + 1 = 0$ の解を α, β とする. $S_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく.

- (1) $S_{n+3} = S_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を証明せよ.
- (2) S_n の値を求めよ.

問題 39. 虚数 $2 + 3i, 2 - 3i$ を解とする方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を 1 つ構成せよ.

問題 40. $x^2 - 2x + a = 0$ の 1 つの解が他の解の平方であるとき, 定数 a の値と 2 つの解を求めよ.

15. 関数

変数 x に対して変数 y が 1 つ定まるような規則が与えられたとき, y は x の関数といい, $y = f(x)$ と表す. f を記号に用いるのは, 英語の function からきている. ちなみに, function という言葉は, ライプニッツ (1646 - 1716) によって作られた. $f(x)$ という記号を使い始めたのはオイラー (1707 - 1783) かららしい. 2 に対応する y の値は, $f(2)$ とこれを用いると表現しやすい.

x の値が, 2 倍, 3 倍, ..., になるとき, y の値も 2 倍, 3 倍... になるとき, y は, x に比例するといいうが, このとき, $y = f(x) = mx$ ($m \in \mathbb{R}$) という関係が成立する. $f(1) = m, f(2) = 2m, \dots$ と表せる. m を比例定数という. 逆に, x が 2 倍, 3 倍, ..., になるとき, y が, $\frac{1}{2}$ 倍, $\frac{1}{3}$, ..., 倍になるとき, y は, x に反比例するといいい, $y = f(x) = \frac{m}{x}$ ($m \in \mathbb{R}$) の関係式が成立する. 比例の関係を複雑にした関数で, $y = f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) という 1 次関数がある.

例題 15.1. y は, $x + 2$ に比例し, $x = 3$ のとき, $y = 25$ である. y の式を求めよ.

(解答) 仮定より, $y = f(x) = m(x + 2)$ ($m \in \mathbb{R}$) と書ける. $f(3) = 25$ より, $25 = m(3 + 2) = 5m$. よって, $m = 5$. 故に, $y = f(x) = 5(x + 2) = 5x + 10$. $\square$

例題 15.2. y は x の関数で, 対応する x と y の積は 16 であるとする. このとき, x の値が, 25 パーセント減少すると, y の値は元の値の何倍になるか.

(解答) 仮定より, $xy = 16$. よって, $y = f(x) = \frac{16}{x}$. 今, x の値 x_0 が, 25 パーセント減少, すなわち, $\frac{3}{4}$ 倍になるとき, $\frac{3}{4}x_0$ が, x の値になる. このとき, $f(\frac{3}{4}x_0) = \frac{4}{3x_0}16$. $f(x_0) = \frac{16}{x_0}$ より,

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0)}{f(\frac{3}{4}x_0)} &= \frac{\frac{4}{3x_0}16}{\frac{16}{x_0}} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

故に, $\frac{4}{3}$ 倍になる. $\square$

問題 41. 次の 1 次関数の関係式を求めよ.

- (1) x の値が 2 増加すると y の値は 4 増加し, $x = 4$ のとき, $y = 7$ を満たす.
- (2) $x = -2$ のとき, $y = -3$, $x = 6$ のとき, $y = 3$ を満たす.

変数 x の動く範囲 I を $y = f(x)$ の定義域, それに対応する y の動く範囲 $\{y = f(x) \mid x \in I\}$ を y の値域という.

問題 42. 次の関数の値域を求めよ.

- (1) $0 \leq x \leq 6$, $a > 0$ のとき, $y = f(x) = ax + 2$.
- (2) $-2 \leq x < 4$ のとき, $y = f(x) = x^2$.

例題 15.3. $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) に対して, 関数 $y = f(x) = ax + 2$ を考える. $f(x)$ の定義域が, $1 \leq x \leq 5$, 値域が, $8 \leq y \leq b$ であるとき, a, b の値を求めよ.

(解答) $f(1) = a + 2$, $f(5) = 5a + 2$. $(5a + 2) - (a + 2) = 4a$. よって, $a > 0$ のとき,

$$\begin{cases} a + 2 = 8 \\ 5a + 2 = b \end{cases} \cdots (1)$$

$a < 0$ のとき,

$$\begin{cases} a + 2 = b \\ 5a + 2 = 8 \end{cases} \cdots (2)$$

よって, $a > 0$ のとき, (1) より, $a = 6$, $b = 5 \times 6 + 2 = 32$. $a < 0$ のとき, (2) より, $a = \frac{6}{5}$. これは, $a < 0$ に不適. よって, $a < 0$ のとき, a, b の値は定まらない. $\square$

問題 43. 関数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) の定義域が, $1 \leq x \leq 3$, 値域が $2 \leq y \leq 4$ のとき, a, b の値を求めよ.

より一般に次の写像という概念がある.

定義 15.4. X, Y を空でない集合とする. このとき, $f: X \rightarrow Y$ が写像であるとは, X の任意の元 x に対して, ただ 1 つの元 $y \in Y$ を対応させる規則をいう.

左記の例 $y = f(x) = ax + b$ では, X, Y を共に, 実数全体 $\mathbb{R}$ の部分集合として取っている. 一般に, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (または, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$) は関数とよばれる.

次に最大・最小の問題について考える. 一般に, 与えられた定義域 I 上の関数の最大値・最小値を求めるのは難しい. 例えば, 2 次関数 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ の場合を考えると, 2 次式の平方化をおこない,

$$\begin{aligned} y = f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

と変形する. $a > 0$ のとき, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ であることに注意すると, $x = -\frac{b}{2a}$ のとき, $f(x)$ は, 最小値 $-\frac{b^2}{4a} + c$ を取ることがわかる. 逆に, $a < 0$ のとき, $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ より, $x = -\frac{b}{2a}$ のとき, $f(x)$ は, 最大値 $-\frac{b^2}{4a} + c$ を取ることがわかる. もし, 最大値・最小値を取る点が考えている $f(x)$ の定義域に無いときは, 考察が必要になる. $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$ を, 2 次関数 $f(x)$ の頂点というが, その語源は, 次の節のグラフの概念を導入されたとき理解される.

例題 15.5. $\mathbb{R}$ 上で定義された, 関数 $y = -x^2 + ax - 2a$ の最大値が 5 であるとき, 定数 a の値を求めよ.

(解答)

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - ax) - 2a \\ &= -(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4} - 2a \end{aligned}$$

より, $x = \frac{a}{2}$ のとき, 2 次関数は最大値 5 をとるのでよって,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} - 2a &= 5 \\ a^2 - 8a - 20 &= 0 \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} a &= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2} \\ &= \frac{8 \pm 12}{2} = 10, \text{ または, } -2. \end{aligned}$$

逆に, $a = -2$ のとき, $\frac{a^2}{4} - 2a = 1 + 4 = 5$. $a = 10$ のとき, $\frac{a^2}{4} - 2a = 25 - 20 = 5$ となる.

故に求める a の値は, -2 または, 10 . □

問題 44. $y = -x^2 + 3x + a$ ($-3 \leq x \leq 1$) の最大値が 3 であるとき, 定数 a を求めよ.

問題 45. n が整数のとき, 関数 $y = f(n) = -3n^2 - 14n + 6$ の最大値とそのときの n の値を求めよ.

問題 46. 2 次関数 $y = f(x) = x^2 - 2kx + k$ ($k \in \mathbb{R}$) の最小値を $m(k)$ と表す.

(1) 関数 $l = m(k)$ を求めよ.

(2) $l = m(k)$ の最大値とそのときの k の値を求めよ.

例題 15.6. $x + 2y = 3$ のとき, $x + y^2$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ.

(解答) $x = 3 - 2y$ より,

$$\begin{aligned} x + y^2 &= (3 - 2y) + y^2 \\ &= (y - 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

と変形できる. よって, $y = 1$ のとき最小値 2 をとる. このとき, $x = 1$. □

問題 47. $x^2 + y = 5$ のとき, $x + y$ の最大値, 最小値を求めよ. またそのときの, x, y の値を求めよ.

問題 48. $x + 2y = 6, x \geq 0, y \geq 0$ のとき, 次の式の最大値, 最小値を求めよ. また, そのときの x, y の値を求めよ.

(1) xy (2) $x^2 + y^2$

次の命題は, 1 次関数, 2 次関数の単調性について解説している.

定理 15.7. (1) $y = f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対して,

(i) $a > 0$ ならば, $f(x)$ は単調増加である.

すなわち, $x_1 < x_2$ ならば, $f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) $a < 0$ ならば, $f(x)$ は, 単調減少である.

すなわち, $x_1 < x_2$ ならば, $f(x_1) > f(x_2)$.

(iii) $a = 0$ ならば, $f(x) = b$ となり, $f(x)$ は定関数である.

(2) $y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) に対して

(i) $a > 0$ ならば,

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} \leq x_1 < x_2 & \text{に対して } f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 < x_2 \leq -\frac{b}{2a} & \text{に対して } f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$$

(ii) $a < 0$ ならば,

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} \leq x_1 < x_2 & \text{に対して } f(x_1) > f(x_2) \\ x_1 < x_2 \leq -\frac{b}{2a} & \text{に対して } f(x_1) < f(x_2) \end{cases}$$

例 15.8. $a \in \mathbb{R}$, 関数 $f(x) = |x - a|$ を考える.

(1) $a \leq x_1 < x_2$ のとき, $f(x_1) < f(x_2)$.

(2) $x_1 < x_2 \leq a$ のとき, $f(x_1) > f(x_2)$.

が成立する.

(証明)(1) $a \leq x$ のとき, $f(x) = |x - a| = x - a$. よって, 定理 15.7(1)(i) より, $a \leq x_1 < x_2$ のとき, $f(x_1) < f(x_2)$.

(2) $x \leq a$ のとき, $f(x) = |x - a| = a - x$. よって, 定理 15.7(1)(ii) より, $a \leq x_1 < x_2$ のとき, $f(x_1) > f(x_2)$. □

16. 座標

[24], [2] によれば, ニコール・オレム (1320 - 1382) という学者が, 2つの異なった量の関係 (運動の通過した距離または時間と与えられた点における速度など) をグラフによって表示する方法を考えたらしい. その後数世紀にわたって用いられなかった. その後, 1637年にデカルト (1596 - 1650), フェルマーにより解析幾何学のために導入された座標 (デカルト座標) により, グラフが考えられるようになった. グラフを用いると関数が映像化され関数の性質が理解できる. 但し, グラフは関数を理解する道具であり, 証明にならないことを注意する.

定義 16.1. 平面上に基点となる一点 O をとり, この O を原点とする 2本の数直線を O で互いに直角に交わるように, 横の方向 (x 軸とよばれる), 縦の方向 (y 軸とよばれる) に引いてできた平面を座標平面という. y 軸は, 座標 1をもつ単位点を O より上にとる. 平面上に点 P をとり, その x 軸への垂線, y 軸への垂線を, それぞれ引いた際, 交わる値が a, b であるとき, P の座標は, (a, b) の位置にあるという.

デカルトは, 座標をベットの中からぼんやり壁の上のハエをの動きを眺めることにより座標を思いついたといわれている.

命題 16.2. 座標面上の 2点 $P(a, b), Q(c, d)$ の 2点間の距離 $d(P, Q)$ は,

$$d(P, Q) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

となる.

(証明) 点 P を通り x 軸に平行な線を引き, 点 Q からその線分に垂線を引き, 交点を R とする. ピタゴラスの定理より,

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 \\ &= (c - a)^2 + (d - b)^2 \end{aligned}$$

よって,

$$d(P, Q) = \overline{PQ} = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}.$$

□

問題 49. 3点 P, Q, R に対して,

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$$

が成立することを証明せよ.

命題 16.3. 座標面上の 2点 $P(a, b), Q(c, d)$ の中点 R の座標は, $R(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$.

(証明) 点 P を通り y 軸に平行な線を引き, 点 Q からその線分に垂線を引き, 交点を T とすると, $\triangle PTQ$ は, $\triangle PSR$ は相似になる. 但し, S は, R から, 線分 TQ に平行な線を引き, PT の交点. よって, $PS = ST$. よって, S の座標は, $(a, \frac{b+d}{2})$. 同様

に, R から PT の平行な線を引き TQ との交点を V とすると, $TV = VQ$. よって, $V(\frac{a+c}{2}, d)$.

R の x 座標は, V の x 座標と同じであり, R の y 座標は, S の y の座標と同じであるので, R の座標は, $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$ となる. $\square$

問題 50. 座標面上の 2 点 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ を $m : n$ に内分する点 R の座標は, $R(\frac{na+mc}{m+n}, \frac{nb+md}{m+n})$ であることを証明せよ.

問題 51. (1) 2 点 $(3, 4)$, $(4, 1)$ から等距離にある, x 軸上の点を求めよ.

(2) 3 点 $(3, 5)$, $(2, -2)$, $(-6, 2)$ から等距離にある点を求めよ.

問題 52. 点 $(-1, 6)$ に関連して, 点 $P(3, 4)$ と対称な点 Q の座標を求めよ.

デカルトは, 幾何学の問題を代数の言葉で解決する解析幾何学 (座標幾何学) を導入した. 例えば, 長さ a を持つ線分と長さ b を持つ線分 ($a > b$) が与えられたとき, 長さ $a + b$, $a - b$ を持つ線分をコンパスと定規で作図することができる. また, 長さ ab , $\frac{b}{a}$, $\sqrt{a}$ を表す線分をコンパスと定規で作図することができる. このようにして, 古代ギリシアの幾何学の問題を秩序正しく解ける (代数的に解く) だけでなく, ギリシア幾何学における制約を超えることが可能になり, 多くの解かれていない問題を解決した. さらに, デカルトは, ヴィエタの記号代数を拡張して, 「同次元の量だけが互いに比較されるべきである」とする「同次元の法則」の壁をやぶり, 現在我々が使用している記号代数の道を開いた. 例えば, デカルト以前は, a^2 は, a を一辺とする正方形の面積, b^3 は一辺が b の立方体の体積を表し, その和 $a^2 + b^3$ は考えられなかった.

定理 16.4. 原点 O と 2 点 $A(a, b)$, $B(c, d)$ から成る三角形 $\triangle OAB$ の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}|bc - ad|$$

となる. 但し, $ad - bc \neq 0$ とする.

(証明) $c > a$, $b > d$ と仮定しても一般性は失われないことに注意する. (図を参照)

点 P を通 x 軸に平行な線分が y 軸と交わる点 $D(0, b)$, 点 B を通り y 軸に平行な線分が x 軸と交わる点を $C(c, 0)$, 2 つの線分の交点を $E(c, b)$ をとる. このとき,

$$\begin{aligned} S &= (\square OCEB \text{ の面積}) - (\triangle OAD \text{ 面積}) \\ &\quad - (\triangle AEC \text{ 面積}) - (\triangle OEC \text{ 面積}) \\ &= bc - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}(c-a)(b-d) - \frac{1}{2}cd \\ &= \frac{1}{2}(bc - ad) \end{aligned}$$

(図において A と B の位置が逆の場合は, $S = \frac{1}{2}(ad - bc)$ になる.) $\square$

問題 53. 原点 O と 2 点 $(3, 6)$, $(5, 3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ.

原点は平面上に自由に取ることができる. 例えば, 道路マップをみて車で移動するとき, ページをめくるときに適当に原点を決め (大抵は今いる位置をそうするが), 目標の場所を把握するよう努めている. この経験を一般化すると, 今原点が与えられ, それによる xy 座標に対して, 点 $P(a, b)$ をとり, それを原点とする新たな XY 座標平面を考える. この 2 つの座標平面を比較すると, xy 座標における点 $Q(x, y)$ の XY 座標でみたときの座標は,

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

となることがわかる. 実際, 点 $P(a, b)$ を XY 座標でみたときの座標を O' とすると, O' の X 座標は, $X = a - a = 0$, Y 座標は, $Y = b - b = 0$ となり, うまく対応していることがわかる. これを座標変換という. この座標変換は, 平行移動を基本にしているが, これに回転を加えた変換が極座標変換といわれるもので, それには三角比の概念を導入しなければならない.

命題 16.5. 2 点 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ を結んでできる線分 PQ を P が原点 O へ平行移動してできた線分 OQ' (Q' は, Q を平行移動した後の点) の Q' の座標は $(c - a, d - b)$ である.

問題 54. 命題 16.5 を証明せよ.

例題 16.6. 3 点 $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$, $C(1, -2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(解答) A を原点に移動すると, x 軸の正の方向へ 2, y 軸の負の方向へ 1 平行移動するので, 平行移動後の B' , C' の座標は, $B'(4, 2)$, $C'(3, -3)$ となる. よって, $\triangle ABC$ の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} |2 \times 3 - 4 \times (-3)| = \frac{18}{2} = 9.$$

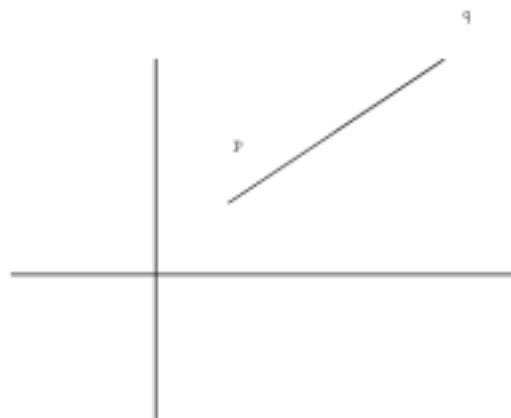
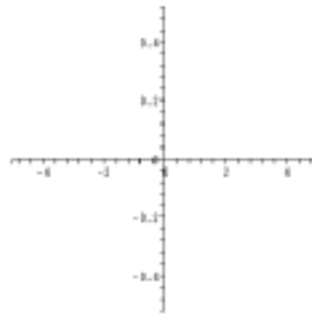
□

例題 16.7. 平行四辺形 $ABCD$ において, $A(3, 4)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$ であるとき, 頂点 D の座標を求めよ.

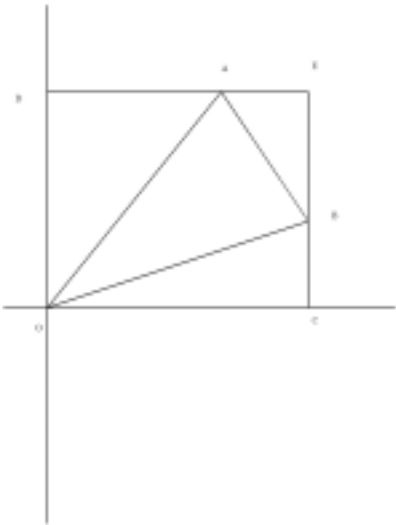
(解答) 点 A は, 点 B を x 軸の正の方向へ 4, y 軸の正の方向へ 1 だけ平行移動したものである. 故に, 点 D も点 C を, x 軸の正の方向へ 4, y 軸の正の方向へ 1 だけ平行移動したものとなる. よって, $D(1, -1)$ となる. □

問題 55. 3 点 $(-2, -4)$, $(2, -1)$, $(3, -2)$ を頂点とする平行四辺形を書こうとすると, もう 1 つの頂点の座標をすべて求めよ.

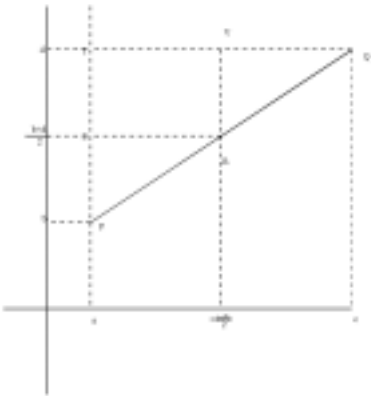
問題 56. 4 点 $A(1, 1)$, $B(5, 4)$, $C(16, 8)$, $D(2, 5)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ は, 平行四辺形であることを証明せよ.



命題 16.2



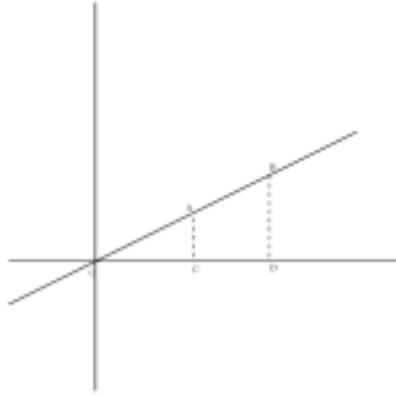
定理 16.4



命題 16.3

17. グラフ

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を関数としたとき、座標の部分集合 $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ を f のグラフという。定理 15.7 の結果を用いると、1 次関数、2 次関数のグラフを座標面上に図示できる。例えば、比例関数 $y = ax$ のグラフは、 $\{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$ のことをさすが、 $\dots, (-2, -2a), (-1, -a), (0, 0), (1, a), (2, 2a), \dots$ と点を座標面上に打つことにより、



原点を通る直線がこのグラフになることがわかる。実際、グラフがこの様になることの証明を試みると、任意のグラフ上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(x_1, ax_1)$, $B(x_2, ax_2)$ が同一直線上にあることを示せばよい。

$$\begin{aligned}\overline{AC} : \overline{BD} &= ax_1 : ax_2 = x_1 : x_2 = \overline{OC} : \overline{OD} \\ \overline{OA} : \overline{OB} &= x_1 : x_2\end{aligned}$$

より、 $\triangle OAC$ と $\triangle BOD$ が相似であるので、四角形 $ACBD$ で $AC \parallel BD$ 。故に、 $\angle OAC + \angle BAC = 180^\circ$ 。よって、3 点 $O(0, 0)$, $A(x_1, ax_1)$, $B(x_2, ax_2)$ が同一直線上にあることが示せる。

逆に、原点を通る直線 l に対する関数を定義することができる。 $x = 1$ に対応する l 上の点 A の座標を $(1, m)$ とすると、 l 上に任意の点 B は (x, mx) と書き表せる。実際、 $\triangle OCA$ と $\triangle ODB$ は相似であるので $\overline{CA} : \overline{DB} = \overline{OC} : \overline{OD} = 1 : x$ 。よって、

$$\begin{aligned}m : \overline{DB} &= 1 : x \\ \overline{DB} &= mx\end{aligned}$$

すなわち, B の座標が (x, mx) となる. それ故, l は, 集合 $\{(x, mx) \mid x \in \mathbb{R}\}$ であり, これは, 関数 $y = mx$ のグラフになる.

定理 15.7 から, $y = mx$ で, $m > 0$ ならば, 対応する直線は原点を通り右上がり, $m < 0$ ならば, 原点を通り右下がり, $m = 0$ のときは, x 軸であることがわかる.

注意 17.1. 一般に, $y = mx$ を対応する直線 $l: \{(x, mx) \mid x \in \mathbb{R}\}$ の方程式という. また, m を直線の傾きという.

1 次関数 $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) の場合のグラフは, $\{(x, ax + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ のことをさすが, これは $\{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$ の各点を, y の方向に b 平行移動したグラフであるので, 直線 $y = ax$ のグラフを y の方向へ b 平行移動した直線であるとわかる. x 軸に平行な直線のグラフは, $\{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ($b \in \mathbb{R}$) と表せるので, 対応する関数は $y = b$ となり, y 軸に平行な直線のグラフは, $\{(a, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ($a \in \mathbb{R}$) と表せるので, 対応する関数は $x = a$ となることがわかる. それ以外の直線は, $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) と書き表せる. 実際

定理 17.2. 異なる点 $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ ($a_1 \neq a_2$) を通る直線の方程式は,

$$y = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}(x - a_1) + b_1$$

となる.

(証明) 点 A, B を原点に平行移動すると, それぞれ $A'(0, 0)$, $B'(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ となる. 点 A', B' を通る直線の方程式 l' は,

$$l': y = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}x$$

故に, 求める直線 l の方程式は,

$$l: y = f(x) = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}x + k \cdots (*)$$

($k \in \mathbb{R}$) と書き表せる. $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$ より, $k = b_1 - \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}a_1$. これを $(*)$ に代入して,

$$y = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}(x - a_1) + b_1$$

が導ける. □

例 17.3. 平行でない 2 直 l, l' は必ず交点を持つことを示せ. 特に,

$$l: y = ax + b$$

$$l': y = a'x + b' \quad (a \neq a')$$

とすると, 求める交点の x 座標は, $x = \frac{b' - b}{a - a'}$.

(解答) 求める交点を $P(x, y)$ とすると, P は, l, l' 上に存在する. よって, $ax + b = a'x + b'$ を満たす. $a - a' \neq 0$ より, $x = \frac{b' - b}{a - a'}$. よって, $y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}$. 逆に, 点 $(\frac{b' - b}{a - a'}, \frac{ab' - a'b}{a - a'})$ は, l, l' 上の点であることが確認できるので, 交点 P は存在し, その座標は $(\frac{b' - b}{a - a'}, \frac{ab' - a'b}{a - a'})$ である. $\square$.

問題 57. x 軸, y 軸に平行でない 2 直線 l, l' を表す方程式を

$$l: y = ax + b$$

$$l': y = a'x + b'$$

とする. このとき, l, l' が直交するための必要十分条件は $a' = -\frac{1}{a}$ であることを証明せよ.

問題 58. 2 直線 l, l' を考える:

$$l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

このとき, l_1, l_2 が平行であるための必要十分条件は, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ であることを証明せよ.

問題 59. 点 $(1, -3)$ を通り, 直線 $2x + 4y = 1$ に平行な直線及び垂直な直線を求めよ.

問題 60. 次の 2 直線の共通点の有無を調べ, あればその座標を求めよ.

$$(1) 3x - 2y - 1 = 0, 6x - 4y - 3 = 0$$

$$(2) 2x - 4y = 2, -x + 2y = -1$$

例 17.4. $y = ax + a + 2$ の表す直線が, a の値に関係なく定点を通るとする. そのとき定点の座標を求めよ.

(解答) 求める定点を (x_0, y_0) とすると,

$$y_0 = ax_0 + a + 2$$

a の値に関係なく上の等式は成立するので, $a = 0$ を代入して, $y_0 = 2$. よって, $ax_0 + a + 2 = 2$. すなわち, $ax_0 + a = 0$. さらに $a = 1$ を代入すると, $x_0 = -1$ が得られる.

逆に, $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ は,

$$a(-1) + a + 2 = -a + a + 2 = 2$$

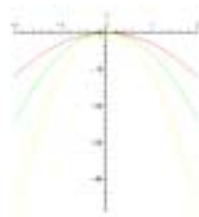
より, 直線上の点であることがわかるので, $(-1, 2)$ が求める定点の座標である. $\square$

問題 61. $(2 + a)x + (1 - 2a)y - 1 + a = 0$ の表す直線が, a の値に関係なく定点を通るとする. そのとき定点の座標を求めよ.

問題 62. 2 直線 $l_1: 2x + 3y = 7$, $l_2: 4x + 11y = 19$ について次の問に答えよ.

- (1) l_1, l_2 の交点と点 $(5, 6)$ を通る直線の方程式を求めよ.
- (2) l_1, l_2 の交点を通り, 直線 $y = 2x$ に平行な直線の方程式を求めよ.

2 次関数 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ のグラフは, $\{(x, ax^2 + bx + c) \mid x \in \mathbb{R}\}$ であるが, 正確な図を手書きするのは難しい. 1 次関数の場合と同様に, まず標準形 $y = ax^2$ のグラフ $G(f) = \{(x, ax^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ を考える. 原点 $(0, 0)$ を通ることがすぐわかるが, 定理 15.7 より, $a > 0$ のとき, $x < 0$ に範囲で $f(x)$ は単調減少, $x > 0$ の範囲で $f(x)$ は単調増加 ($a < 0$ のとき, $x < 0$ に範囲で $f(x)$ は単調増加, $x > 0$ の範囲で $f(x)$ は単調減少) となるが, 有限個の点を座標面上打っていくと,



と書ける. $a > 0$ のとき下に凸の放物線, $a < 0$ のとき上に凸放物線という. また, y 軸に関してグラフは対称であることがわかる. 実際, 任意の点 $A(x, ax^2)$ の y 軸に関する対称な点を $B(p, q)$ とすると, 線分 AB の中点は y 軸上の点より, $\frac{x+p}{2} = 0$. よって, $p = -x$. また, 線分 AB は, y 軸に直交するより, x 軸に平行となる. 故に, $q = ax^2$. よって, B の座標は, $(-x, ax^2)$ となり, グラフ上の点であることがわかる.

一般の 2 次関数 $y = h(x) = ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q$ ($p, q \in \mathbb{R}$) と変形すると, そのグラフは $G(h) = \{(x, a(x - p)^2 + q) \mid x \in \mathbb{R}\}$ となるが, これは標準形のグラフ $G(f)$ を x 軸方向 p , y 軸方向 q 平行したグラフであることがわかる. 実際, 任意の点 $A(x, y) \in G(f)$ にたいして, x 軸方向 p , y 軸方向 q 平行移動した点 $A'(X, Y)$ との関係式

$$\begin{cases} X = x + p \\ Y = y + q \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} x = X - p \\ y = Y - q \end{cases}$$

これを, $y = ax^2$ に代入して,

$$Y - q = a(X - p)^2$$

すなわち

$$Y = a(X - p)^2 + q$$

となり, A' の座標は $(X, a(X - p)^2 + q) \in G(h)$ であることがわかる. (逆に, $G(h)$ の各点は, 平行移動して $G(f)$ の点に成ることが確かめる.) このとき, (p, q) を 2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフである放物線の頂点といい, $x = p$ を放物線の軸という. 標準形同様に, 放物線は軸に関して対称である.

$y = f(x) = a(x - p)^2 + q$ において, $a > 0$ のとき, $f(x)$ は $x = p$ で最小値 q を取ることがグラフからわかる. ($a < 0$ のとき, $f(x)$ は $x = p$ で最大値 q を取ることがわかる) 言葉で理解するよりグラフで理解する方が効果的ではあるが, グラフはあくまでも参考資料であることに注意する.

例 17.5. $y = -x^2 + 2x - 3$ のグラフを x 軸に関して対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ.

(解答) 求める方程式を $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると, そのグラフは, $G(f) = \{(x, ax^2 + bx + c) \mid x \in \mathbb{R}\}$ となる. 任意の点 $(x, ax^2 + bx + c) \in G(f)$ の x 軸に関して対称な点は $(x, -(ax^2 + bx + c))$ であることに注意する. この点が, $y = -x^2 + 2x - 3$ のグラフの点であるので,

$$\begin{aligned} -(ax^2 + bx + c) &= -x^2 + 2x - 3 \\ (1 - a)x^2 - (b + 2)x + 3 - c &= 0 \end{aligned}$$

これが全ての $x \in \mathbb{R}$ について成立するので, 下記の結果より $a = 1, b = -2, c = 3$ が得られる. 故に求める方程式は $y = x^2 - 2x + 3$. $\square$

定理 17.6. $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $ax^2 + bx + c = 0$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ について成立するならば, $a = b = c = 0$.

(証明) 与式に $x = 0, 1, -1$ を代入すると,

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

これより $a = b = c = 0$ がいえる. $\square$

問題 63. 放物線の方程式 $y = -x^2 + 2x - 3$ のグラフを原点に関して対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ.

問題 64. $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを x 軸方向へ 3, y 軸方向へ -1 平行移動させ, さらに x 軸に関して対称移動させた放物線の方程式が, $y = 2x^2 - 3x + 1$ になった. このとき, a, b, c を求めよ.

18. グラフと方程式

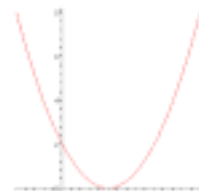
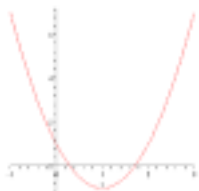
関数 $y = f(x)$ のグラフ $\{x, f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ と x 軸 $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ の交点が存在したとき, その交点の x 座標は, 方程式 $f(x) = 0$ の解になる. 2 次関数 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ の場合平方化より

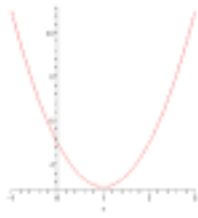
$$y = f(x) = a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

と変形できるので, そのグラフは頂点 $\left(\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$ の放物線になることがわかる. 2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると, 2 次方程式の解の性質とグラフとの関係が以下の通りになることが理解できる:

判別式		解の性質		x 軸とグラフの関係
$D > 0$	$\Leftrightarrow$	異なる 2 つの実数解を持つ	$\Leftrightarrow$	異なる 2 点で x 軸で交わる.
$D = 0$	$\Leftrightarrow$	重解を持つ	$\Leftrightarrow$	x 軸とただ 1 点で接する.
$D < 0$	$\Leftrightarrow$	異なる 2 つの虚数解を持つ	$\Leftrightarrow$	x 軸と接しない.

$D < 0$ かつ $a > 0$ のときは, 頂点座標の y 座標が $-\frac{D}{4a} > 0$, すなわち 2 次関数の最小値が正であるので, グラフは x 軸より上になる. $a < 0$ のときは, $-\frac{D}{4a} < 0$ より, 2 次関数の最大値が負になるのでグラフは x 軸より下になる.





例 18.1. 2 次関数 $y = -x^2$ の放物線と 1 次関数 $y = -3x + k$ ($k \in \mathbb{R}$) の直線の共有点の個数を調べよ.

(解答)

放物線 $\{(x, -x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ と直線 $\{(x, -3x + k) \mid x \in \mathbb{R}\}$ が共有点 (s, t) を持つとすると, $t = -s^2 = -3s + k$ を満たす. すなわち, $s^2 - 3s + k = 0$. これより問題は 2 次関数 $s^2 - 3s + k$ の放物線と x 軸との共有点の個数になる. よって, 2 次方程式の判別式を D とすると,

判別式		k の条件		共有点の個数
$D > 0$	$\Leftrightarrow$	$k < \frac{9}{4}$	$\Leftrightarrow$	共有点は 2 個
$D = 0$	$\Leftrightarrow$	$k = \frac{9}{4}$	$\Leftrightarrow$	共有点は 1 個
$D < 0$	$\Leftrightarrow$	$k > \frac{9}{4}$	$\Leftrightarrow$	共有点はなし

□

問題 65. 2 次関数 $y = x^2 + mx + m + 3$ の放物線が x 軸に接するときの m の値と接点の座標を求めよ.

問題 66. 2 次関数 $y = -x^2 - 2x + 9$ の放物線と 1 次関数 $y = 2x - 3$ の共有点があればその座標を求めよ.

REFERENCES

- [1] アリストテレス, 出 隆訳, 形而上学 上下, 岩波書店.
- [2] D. C. ベンソン, 柳井 浩訳, 数学へのいざない 上下, 朝倉書店.
- [3] B. Artmann, 大矢建正訳, 数学の創造者 (ユークリッドの原論の数学), シュプリンガー・フェアラーク東京.
- [4] H. D. エビングハウス他, 成木勇夫訳, 数, シュプリンガー・フェアラーク東京.
- [5] J. H. Conway and R. K. Guy, 根上生也訳, 数の本, シュプリンガー・フェアラーク東京.
- [6] R. Courant and H. E. Robbins, 森口繁一訳, 数学とは何か, 岩波書店
- [7] Daniel Duverney, 塩川宇賢訳, 数論, 森北出版.
- [8] 銀林浩, 野崎昭弘, 小沢健一, 算数・数学百科, 日本評論社.
- [9] 草場公邦, 渡辺敬一, 代数の世界, 朝倉書店.
- [10] K. Menninger, 内林政夫, 数の文化史, 八坂書房.
- [11] 佐々木 力, デカルトの数学思想, 東京大学出版.
- [12] 塩川宇賢, 無理数と超越数, 森北出版.
- [13] 志賀浩二, 中高一貫数学コース 数学 1, 岩波書店.
- [14] 志賀浩二, 中高一貫数学コース 数学 2, 岩波書店.
- [15] 志賀浩二, 中高一貫数学コース 数学 3, 岩波書店.
- [16] 志賀浩二, 無限のなかの数学, 岩波書店.
- [17] デカルト, 谷川多佳子訳, 方法序説, 岩波書店.
- [18] デカルト, 野田又夫訳, 精神指導の規則, 岩波書店.
- [19] 遠山 啓, 数学の学び方・教え方, 岩波書店.
- [20] 遠山 啓, 数学入門 (上) (下), 岩波書店.
- [21] 遠山 啓, 無限と連続, 岩波書店.
- [22] 遠山 啓, 関数を考える, 岩波書店.
- [23] 遠山 啓, 座標とグラフ, 岩波書店.
- [24] 上垣渉, 数学の歴史, ベレ出版.
- [25] プラトン, 田中美知太郎訳, テアイテトス, 岩波書店.
- [26] 吉田洋一, 零の発見, 岩波書店.