

1 回生実験物理学セミナーの手引き

2005/04/25

表面物理研究室 星野

目標: 『空間的・時間的に局在した波を作ろう!』

現代社会において、遠くにいろいろな情報を伝える手段として電磁波を用いていることは、皆さん知っていると思います。ラジオやテレビ、携帯電話など身の周りの多くに電磁波を利用した製品が溢れています。そこには、電磁波の発生方法や信号波の伝送、搬送波の変調・復調など、人間が「波を如何に操るか」という技術が入っています。実際、僕たちがよく利用するテレビに関しても、放送局がどのように電波に画像や音声を載せて発信しているかとか、どのように受信して映像にしているかなど、深く考えてみると「どうやっているのだろう?」と思うことが多いと思います。今は、インターネットなどで検索すると、それらに関していろいろな情報を手軽に得ることができます。一方、物理科学科では、1 回生から 3 回生の講義科目で、学問としての「波動」や「電磁波(電磁気学)」に関する基礎的な考え方を学びます。

今日のセミナーでは、この「波を操る」ということに焦点を当てて進めます。まあ具体的には、今から自家製でラジオ送信をしようという風なことを想定しておいて下さい。最初に、すべての波の基本である「平面波」の性質について考えて見ましょう。みなさんが、波を作ろうとしたときにできる波は基本的には「平面波(波源近傍では“球面波”の場合もある)」になってしまうと思います。この平面波は、

$$u(\vec{r}) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (\text{球面波は、} u(r) = \frac{e^{ikr}}{r})$$

という形をしていまして、空間的・時間的に無限に続く正弦波(余弦波)として表されます。まず手始めに、時間的に進行するこの平面波を、グラフに表してみましょう[課題 1]。逆にある場所で、このような波を観測すると、時間的に角振動数 ω で単振動する波が観測されるだけです。単振動と言うだけあって無限に同じ振動数で振動し続けるため、この波に何の伝達情報も含まれません。しかし、このような、平面波は信号を伝達する母体となり(搬送波)、重要な役割を果たすことになります。

次に、 (k, ω) の値は共通として、進行方向の異なる平面波を重ね合わせてみましょう[課題 2]。つまり、

$$u(\vec{r}, t) = u_1(\vec{r}, t) + u_2(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + A \cos(-\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

どのような波が描けましたか? ここまでは、おそらく、皆さんの予想した通りの波が描けたことでしょう。

いよいよ、今日の本題「波を操る」に入ります。今、僕たちは遠くにいる人に対して「ある情報(=信号)」を送信したいと思います。一番簡単な信号は、モース信号ですね。もちろん、人間の音声や画像でもいいです。たとえば、10km離れたところにいる友達と交信しようとしたとき、いくら大声を出しても届くはずありません。そこで、数十キロも離れた距離を伝わる平面電磁波を用いるわけです。この波のことを、普通僕たちは「電波」と呼びます。でもこの「電波」は、時間的に単に振動しているだけの平面波(=搬送波)ですので、この中にはどんな信号も含まれていません。では、信号をどのように載せるか？単に重ね合わせるだけです。

$$u(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) + A \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)$$

といった具合に。たとえば、第一項を搬送波、第二項を信号波とすれば、音声を搬送波に載せて遠くまで伝えることができます。あとは、適当なフィルターを通して、搬送波を取り除けば音声を取り出せます。

では、上の式にならって、波の合成をやってみましょう[課題 3]。非常に近い(k_1, k_2)および(ω_1, ω_2)を選ぶと、波の塊が移動していく様子がわかります。すでに、高校の物理で習っていると思いますが、このような現象を「ビート(うなり)」と呼びます。時間を進めると、空間的にうなりが移動していくと思います。そう言えば、うなりの振動数はいくらでしたか？念のため、上の式を変形しておきましょう！

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t) &= A \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) + A \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t) \\ &= A \cos\left(\frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - (\omega_1 + \omega_2) \cdot t}{2}\right) \cos\left(\frac{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - (\omega_1 - \omega_2) \cdot t}{2}\right) \end{aligned}$$

ある空間上の点(例えば、 $\vec{r} = 0$)で、時間的に通り過ぎていく波動を観測するとしましょう。つまり、上の式で $\vec{r} = 0$ とすると、

$$u(\vec{r}, t) = A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)$$

となります。今、各自で実際に描いた波とこの式を対応させてみましょう。どんな情報が得られますか？どれが、うなりに対応する部分でしょうか？この式と、グラフに描いた波をじっくりと見比べて、式のどの部分がグラフのどの波に対応するか吟味してください[課題 4]。

ここで、 $\cos()$ の中身のことを、「位相」と呼びます。(つまり、角度に対応する部分)。ここまでの内容をまとめると、『位相の異なる2つの波を重ね合わせると、ビートが生じる』という感じでしょうか。別の言い方をすれば、ちょっとだけ波の塊(波の局在)ができたように見えます。つまり、強度の強いところと、強度

がゼロになるところが次々と通り過ぎていく感じです。まさに、「うなり」ですね！でも、よくよく考えてみると、平面波である「正弦波」だって波打って伝わっていくじゃないか！と思う人もいます。でも、平面波とビートは違うのです。平面波は空間的に存在している確率が1なのです。つまり、至るところで発見できる波です。違いを説明できますか？(Hint: 平面波を指数関数で書いてみたら...).

思い出しましょう！今日の目標は何でしたか？『空間的・時間的に局在した波を作ろう』でした。上の課題で、取りあえず局在した波を作ることができました。 $(\vec{k}_2, \omega_2)$ の値を変えると、当然うなりの形(波の局在の仕方)も変わります。つまり、適当な $(\vec{k}_2, \omega_2)$ を選んでやると、自分好みの波が作れそうな気がしてきます。でも、まあ所詮2つの正弦波を重ね合わせるだけなので、「どんな波でも作れるのかよ？」と言われれば、難しいところがあります。でもそれに気づいた人は、いい勘をしています。2つの正弦波で作製できる波の種類なんて、たかが知れています。では、足し合わせる波の個数を増やしてみましょう。もちろん、互いに位相の異なる3つ、4つ、...の波を重ね合わせたら、どんな波になるでしょう？[課題5]

では、時刻 $t=0$ で空間的に局在した波を式で表しましょう。つまり、位相の異なる多くの波を足し合わせるわけですので、(x成分のスカラー表示にします)

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^N \cos((k_{x1} + n\delta k_x) \cdot x) \\ &= \cos(k_{x1} \cdot x) + \cos((k_{x1} + 1\delta k_x)x) + \cos((k_{x1} + 2\delta k_x)x) + \cos((k_{x1} + 3\delta k_x)x) + \dots + \cos(k_{x2} \cdot x) \\ &= \frac{\sin \frac{N\delta k_x \cdot x}{2}}{\sin \frac{\delta k_x \cdot x}{2}} \end{aligned}$$

ここで、

$$\delta k_x \equiv \frac{k_{x2} - k_{x1}}{N} \equiv \frac{\Delta k}{N}$$

で定義します。つまり、 $k_{x1} \sim k_{x2}$ までの間を N 等分して(←これで位相差ができる)、 $\cos$ の和を計算するということです。

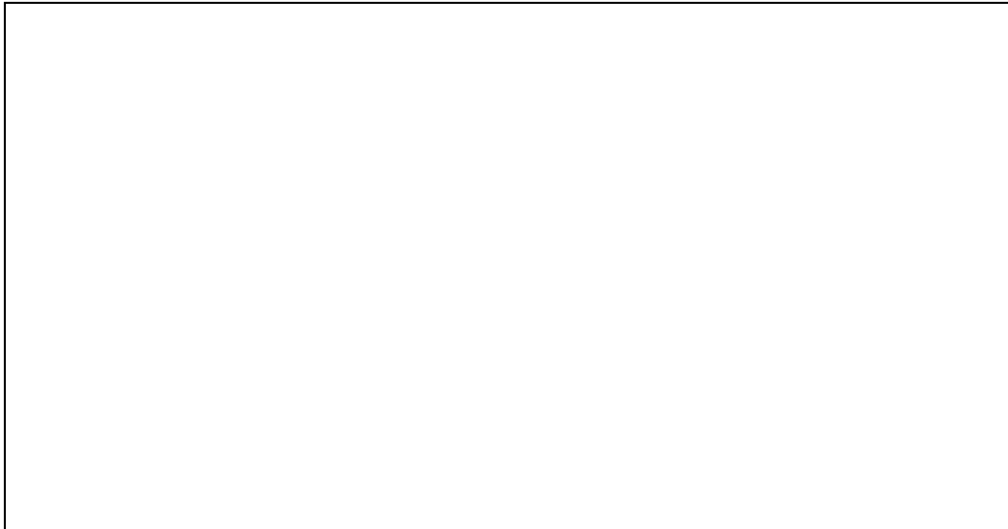
逆に空間上のある点において、時間的に局在した波は(ある点で波を観測すると時間的にこんなパルスが通り抜ける感じ)次のようになるでしょう！

$$u(t) = \sum_{n=0}^N \cos((\omega_1 + n\delta\omega) \cdot t)$$

ここで、

$$\delta\omega \equiv \frac{\omega_2 - \omega_1}{N} \equiv \frac{\Delta\omega}{N}$$

です。これらの式を使って、非常に多くの波を合成してみましょう[課題 6]。(例えば、 $N=10$ 個くらいとか)。どんな、波になるでしょうか？いくつか着目する点があります。その前に、得られた波の特徴を平面波と対比されながら、挙げてみてください。



いくつかあると思います。例えば、

- ① 局在した波束の幅
- ② 局在した波束の高さ(強度)
- ③ 2つの波束間距離
- ④ 小さな波連の個数

これらを、物理的な描像と結び付けられたら、今日のセミナーは終了です。それぞれを、前頁で出てきた文字などで表現してみましょう[課題 7]。波の重ね合わせの条件と波束の関係がよく分かると思います。

このように、時間的に局在した波ができるとすれば、信号伝達手段として最も原始的な「モールス信号」を送ることで、交信が出来そうですね。

[最終課題](時間中に出来なければ、自動的に宿題となります)

ある空間上の点に、時間的に無限小に局在した波束を作るためには、どうすればよいのでしょうか？(無限小に局在した波束とは、ある瞬間的な時刻 $t=0$ にしか存在しないパルスとします) また、このことと「波の不確定性」との関係を説明してください。逆に、空間的に局在した波束の場合にも、不確定性関係が成立します。

多くの波を重ね合わせると、思い通りの波束を形成することができます。この手法は、フーリエ解析といって、自然界にあるあらゆる曲線も多数の波の重ね合わせで表現できるという強力なものです。今回の場合では、どれも似たような波しかできませんでしたが、この原因は足し合わせる $\cos()$ の振幅をどれも 1 にしていたことです。もし、周期性を持つ任意の物の形をフーリエ展開によって、表現したければ、次の式で表されることになります。

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^N a_n \cos((k_{x1} + n\delta k_x) \cdot x) \\ &= a_0 \cos(k_{x1} \cdot x) + a_1 \cos((k_{x1} + 1\delta k_x)x) + a_2 \cos((k_{x1} + 2\delta k_x)x) + a_3 \cos((k_{x1} + 3\delta k_x)x) + \dots \\ &\quad + a_N \cos(k_{x2} \cdot x) \end{aligned}$$

何か、先ほど出てきた式と似ていませんか？(わざと似せて書いたのですが…) 実は、上の級数を極限に持っていくと(積分にする)、周期性のないどんな物の形も表現できるようになります。これをフーリエ変換(フーリエ積分)と言います。そうすると、逆に周期性を持った複雑な曲線は、 $\cos(nkx)$ 成分の和に分解できることを意味することに気づくでしょう。これを、スペクトル分解と呼ぶのです。今後、多くの場面で「スペクトル」という言葉を耳にします。今のみなさん段階ではないかもしれませんが、僕は毎日 1 回以上は耳にします。この「スペクトル」というのは、いろいろと混ざった中から、全体の構成要素となる一つ一つの成分に分解し、それぞれの頻度を縦軸にとったグラフのことを言うのです。出くわしたときに、また思い出してください。

次回の予告です。このように、空間的・時間的に局在した波を作るには、位相の異なる波と足し合わせたらよいことが分かりました。逆に『位相の異なる波が重なると波の強めあいや弱めあいが起こる』ことを意味します。これが、波の干渉による回折パターンの形成です。回折パターンは、今までの演習で得られた波束を目で見ていることになります。その干渉縞の間隔(上の着目点③)は、回折格子や原子間隔と**逆数の関係**で対応しています(すでに上で考察済みですね)。回折や顕微法は、目では見えないようなものを、それぞれ逆空間や実空間で拡大して、見るができるのです。来週、実際に確かめてみましょう。

※最終日(第7週目)の発表会では、これらの課題や考察を踏まえて資料を作製し、口頭発表してもらうことになります。持ち時間は、一人だいたい 15 分程度でしょうか？(ただし、進行状況によっては、実験レポートに変わることもあります。)